...NTIFIQUES
...-A. LAISANT, examinateur d'admission à l'École Polytechnique

C.-A. LAISANT

Initiation Mathématique

OUVRAGE ÉTRANGER A TOUT PROGRAMME
DÉDIÉ AUX AMIS DE L'ENFANCE

Avec 103 figures dans le texte

QUATORZIÈME ÉDITION
CONFORME A LA TREIZIÈME
avec une note sur *l'Initiateur mathématique* de M. J. CAMESCASSE

PARIS
LIBRAIRIE HACHETTE ET Cie
79, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1915

2 fr.

INITIATION MATHÉMATIQUE

COLLECTION DES INITIATIONS SCIENTIFIQUES
Fondée par C.-A. LAISANT, examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique

C.-A. LAISANT

Initiation Mathématique

OUVRAGE ÉTRANGER A TOUT PROGRAMME

DÉDIÉ AUX AMIS DE L'ENFANCE

Avec 103 figures dans le texte

QUATORZIÈME ÉDITION
CONFORME A LA TREIZIÈME
avec une note sur l'*Initiateur mathématique* de M. J. CAMESCASSE

PARIS
LIBRAIRIE HACHETTE ET Cie
79, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, 79

1915

GENÈVE

IMPRIMERIE ALBERT KÜNDIG

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE A LA DEUXIÈME ÉDITION[1]

En publiant cette édition nouvelle de l'*Initiation mathématique,* j'ai pour premier devoir de remercier mes nombreux confrères, des périodiques scientifiques et de la presse quotidienne des divers pays, dont le concours a si largement aidé à la diffusion de ce livre. Je dois aussi l'expression de ma reconnaissance à tous les correspondants personnels qui m'ont fait part de leurs réflexions ; chez eux, j'ai trouvé un encouragement de plus à poursuivre une tâche que je croyais utile lorsque je l'ai entreprise ; j'en suis sûr aujourd'hui, en présence des témoignages reçus.

J'avais provoqué les critiques ; je n'ai guère obtenu que des marques de bienveillance. Aussi, cette deuxième édition ne diffère-t-elle pour ainsi dire pas de la première. Cependant, j'ai pu tirer parti de certaines observations pour corriger une erreur matérielle de calcul (au nº 40), dont les conséquences ne présentaient pas d'ailleurs une gravité fondamentale, et pour ajouter çà et là quelques remarques utiles.

Pour dissiper toute équivoque, je dois insister sur ce fait que l'*Initiation mathématique* ne peut et ne doit être qu'un guide ; que l'éducateur devra s'en inspirer, non pas le suivre servilement, et cela pour le plus grand profit de l'élève ; que cet instrument nouveau ne saurait dispenser de la mise en œuvre des qualités pédagogiques indispen-

[1] Cette nouvelle édition ne diffère des précédentes que par de très légères modifications et par l'adjonction d'une note finale concernant l'*Initiateur mathématique* de J. Camescasse, sur laquelle nous appelons l'attention du lecteur.

sables, dont les deux principales sont la patience, et le discernement psychologique.

C'est surtout dans le monde de l'enseignement, et particulièrement de l'enseignement primaire, que j'ai rencontré les approbations qui m'ont le plus touché. Dans les écoles normales d'instituteurs, notamment, un heureux courant d'opinion se dessine, qui est de nature à justifier bien des espérances.

Les nombreux amis que je compte dans l'enseignement secondaire m'ont également prodigué des marques de sympathie ; mais quelques-uns, émus de mes critiques envers l'administration universitaire, m'ont amicalement reproché de n'avoir peut-être pas rendu à leurs efforts une justice suffisante, me rappelant que les améliorations introduites dans les programmes et les méthodes avaient été en grande partie leur œuvre.

C'est assurément ma faute si je n'ai pas été complètement compris. Pour qu'il n'y ait aucune méprise, je tiens donc à répéter que nul plus que moi ne rend hommage aux courageux efforts de ces maîtres admirables, à leur science et à leur conscience ; leur mérite est d'autant plus grand qu'ils ont à lutter contre une bureaucratie dont ils sont les premières victimes, contre un système séculaire de centralisation et de routine qui semble avoir pris à tâche de tuer les initiatives et d'empêcher la lumière de pénétrer dans les cerveaux. De mes critiques envers cette bureaucratie, ennemie de l'enseignement, je n'ai rien à retirer.

Les moyens concrets que j'emploie n'avaient pour utilité, dans ma pensée, que d'*initier* l'enfant aux vérités mathématiques ; on m'a fait remarquer que, parfois, ces procédés pouvaient être heureusement mis en œuvre, plus tard, dans la période d'*étude*, pour rendre plus limpides certaines démonstrations. C'est fort juste, et je n'y avais pas pensé dès l'abord. Je pourrais citer notamment la théorie de la division (nº **20**), celle de la racine carrée (nº **25**), la sommation des termes d'une progression par quotient (nº **35**),

C'est une nouvelle face de la question, sur laquelle je me permets d'attirer l'attention du lecteur.

En terminant, je ne saurais assez rappeler aux familles, surtout aux mères, l'intérêt et le charme qu'il y aurait pour elles à se faire les éducatrices de leurs enfants, chaque fois que la possibilité matérielle existe. Et, dans la période d'initiation, c'est en même temps la chose la plus aisée. Pour les premières notions mathématiques, en particulier, il n'est nullement nécessaire de posséder une forte instruction préalable ; il suffit de bien aimer ses enfants et d'apprendre à connaître leur esprit, à en observer les manifestations et l'évolution. Avec une dose bien légère de bonne volonté, le père et la mère d'instruction moyenne deviendront des instituteurs, égalant, sinon surpassant, les plus savants maîtres.

Et, si même vous avez dû envoyer prématurément vos enfants à l'école, n'hésitez pas, quand le soir ils rentrent au logis, à suivre leurs progrès, à devenir leurs répétiteurs, les auxiliaires du maître à qui vous les avez confiés. Je souhaiterais que ce petit volume pût vous aider à accomplir cette tâche.

AVANT-PROPOS

Ce petit livre contient le développement de principes exposés sous le même titre dans une conférence faite il y a plusieurs années, et publiée dans l'*Education fondée sur la science,* volume de la Bibliothèque de Philosophie contemporaine. Sur ce point particulier du grand problème de l'éducation, quelques amis m'ont exhorté à préciser davantage. Peut-être ont-ils raison. En tous cas, l'effort mérite d'être tenté, en face de la persistance qu'on semble mettre à déformer les jeunes cerveaux. C'est à un sauvetage de l'enfance que je convie parents — mères de famille surtout — et éducateurs. Depuis la toute première enfance jusqu'au début des études, mettons par exemple de 4 à 11 ans, il est possible de faire pénétrer dans l'esprit de l'enfant vingt fois plus de choses qu'on ne le fait, en matière mathématique ; cela en l'amusant, au lieu de le torturer.

Les chapitres divers qu'on trouvera ci-après ne forment pas un tout didactique ; ils ne sont pas non plus disposés au hasard. C'est un guide remis entre les mains de l'éducateur, dont il pourra s'inspirer, mais qui ne saurait le dispenser de l'étude constante du cerveau qu'il veut développer. Tantôt il faudra aller de l'avant, tantôt s'arrêter ou s'interrompre ; parfois revenir en arrière. Ce qui serait dangereux, ce serait de vouloir aller trop loin sans se préoccuper de ce qui précède.

Vous trouverez d'assez nombreuses notions dans ces pages ; essayez de vous en inspirer, ne vous en rendez pas esclaves. Par-dessus tout, attachez-vous à intéresser, à amuser l'enfant, NE LUI FAITES RIEN APPRENDRE PAR COEUR ;

et à 11 ans, s'il est d'intelligence moyenne, il saura et comprendra mieux les mathématiques que les neuf dixièmes de nos bacheliers. Ce qui est plus important, il en aura pris le goût et aura plaisir à en entreprendre l'étude.

Que les séances de jeu — il ne faut pas les appeler des leçons — ne se prolongent jamais au delà de la limite où l'attention faiblit, où la curiosité s'éteint. Sinon, vous ne sauriez obtenir que des résultats nuisibles.

Je souhaite que de pareilles tentatives puissent être faites pour les sciences physiques et les sciences naturelles. La tâche ne serait pas plus difficile, au contraire. Et peut-être alors verrait-on les générations qui viennent, délivrées de la camisole de force de leurs devancières, prodiguer largement à l'humanité les trésors d'une intelligence qu'on aurait laissé librement s'épanouir.

Le présent livre n'a rien de commun avec les Récréations mathématiques, qui ont motivé la publication d'un assez grand nombre d'ouvrages excellents, parmi lesquels, pour me limiter à ceux qui sont publiés ou traduits en langue française, je me bornerai à citer les quatre volumes d'EDOUARD LUCAS, « l'Arithmétique amusante » du même auteur, le volume de ROUSE BALL, traduit de l'anglais, et celui de FOURREY, qui a surtout pour objet des questions arithmétiques.

Dans les Récréations mathématiques, le mot le dit assez, il s'agit d'appliquer à des sujets amusants, jeux divers, combinaisons, etc., les théories mathématiques déjà connues; et souvent une certaine instruction est nécessaire pour pouvoir seulement comprendre les explications données.

Ici, c'est l'inverse; nous nous servirons de questions amusantes comme moyen pédagogique, pour attirer la curiosité de l'enfant et arriver ainsi à faire pénétrer dans son esprit, sans efforts imposés, les premières notions mathématiques les plus essentielles. Et la diversité des questions, qui pourrait faire croire à un désordre apparent, cache une suite d'idées, voulues, utiles et complètement ordonnées.

Par conséquent, notre «Initiation» ne fait pas double emploi avec les « Récréations» ; toutes deux ont leur raison d'être. Au cours de leurs études, les écoliers curieux, au souvenir des jeux de leur enfance, pourront tirer grand profit de la lecture des ouvrages qu'ils comprendront alors, qui feront surgir en eux des idées nouvelles, perfectionneront et aiguiseront leur esprit.

Et à ceux qui leur viendraient dire que les Récréations sont indignes d'eux, il suffirait de répondre que les plus grands savants ne dédaignèrent pas de s'en occuper; et que si parfois les études mathématiques nous conduisent à rire, c'est un mérite de plus, attendu que, suivant la grande parole de Rabelais « Rire est le propre de l'homme ».

Là-dessus, si les pontifes ne sont pas contents, sachons nous en consoler. Ceux pour lesquels le mot « instruire » est synonyme d' « ennuyer » — et quelquefois de « torturer » — sont de véritables malfaiteurs publics. Il est temps que leur domination néfaste prenne fin.

J'ai eu surtout en vue la France, en écrivant ce petit volume, mais le mal n'est pas particulier à notre pays. Partout, il faut se placer *en dehors des programmes* si on veut libérer l'enfance; partout, si on l'aime, il faut s'attendre à l'hostilité d'une administration qui semble avoir pris à tâche d'entraver son développement cérébral.

Un dernier mot, presque inutile. Entre les mains de l'enfant, ce livre serait sans objet, presque dangereux. C'est à l'éducateur qu'il est destiné, à l'éducateur seul, pour lui servir de guide. Mais, arrivé à la période des études sérieuses, l'élève trouvera souvent profit à cette lecture, sorte de coup d'œil rétrospectif sur l'évolution première de son jeune esprit.

INITIATION MATHÉMATIQUE

1. — Les bâtons.

L'une des premières facultés qu'on doive développer chez l'enfant, dès l'âge où son activité cérébrale s'éveille, c'est celle du dessin. Presque toujours, il en a le goût instinctif, et il faut l'y encourager, bien avant d'entreprendre de lui enseigner l'écriture ou la lecture.

Dans ce but, on devra lui mettre entre les mains, pour commencer, une ardoise ou une feuille de papier quadrillé, placer entre ses petits doigts un crayon d'abord, une plume lorsqu'il sera devenu plus habile, et lui faire tracer simplement des bâtons au début; non pas les bâtons inclinés classiques, préparatoires à l'écriture penchée, mais de petites lignes suivant les directions du tracé du quadrillage, et bien régulièrement espacées.

Ces lignes étant dirigées de haut en bas d'abord, puis au bout de quelque temps de gauche à droite, l'élève formera ainsi des *bâtons verticaux* (fig. 1) et des *bâtons horizontaux* (fig. 2).

Fig. 1. — Bâtons verticaux.

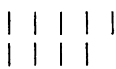
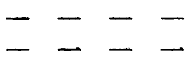


Fig. 2. — Bâtons horizontaux.



Graduellement, on lui apprendra à tracer des bâtons plus ou moins longs, à en intercaler entre les lignes du quadrillage, à en mener de nouveaux qui soient obliques, dans toutes les directions possibles. Puis on lui fera former des figures composées d'assemblages de bâtons plus ou moins longs. Nous en dirons quelques mots plus loin.

Plus tard, soit avec les instruments (règle, équerre, compas), soit à main levée, on lui fera dessiner des figures où entrent des lignes courbes. Ces exercices, qui développent l'habileté de la main et la justesse de l'œil, ne devront jamais être abandonnés tant que durera la période éducative. Nous n'en parlons ici que dans la mesure indispensable pour ce qui va suivre : mais à ce point de vue même, il faut insister sur ce fait qu'ils doivent être indiqués, jamais imposés. S'ils cessent de constituer un jeu, le but sera manqué. Laissez l'enfant gribouiller sur son ardoise, gâcher quelques feuilles de papier ; guidez-le de vos conseils, il ne manquera jamais de vous en demander ; mais quand il en aura assez, laissez-le faire autre chose. C'est une condition rigoureusement nécessaire pour développer chez lui l'esprit d'initiative, pour entretenir sa curiosité naturelle, pour éviter la fatigue et l'ennui.

Il y aurait un livre entier à faire sur ce premier enseignement du dessin, dont j'ai dû dire quelques mots ; d'autres sur l'écriture, sur la lecture, qui ne doivent venir qu'ensuite, et qui sont en dehors de mon sujet. Mais tous ces enseignements, s'appliquant à l'enfance, doivent invariablement s'inspirer du même principe fondamental, c'est-à-dire conserver l'apparence de jeux, respecter la liberté de l'enfant et lui donner l'illusion (si c'en est une) que c'est lui-même qui invente les vérités mises sous ses yeux. Quant à l'âge auquel doit commencer à être donnée cette première initiation mathématique, débutant par celle du dessin, et marchant ensuite parallèlement, il n'y a pas de règle absolue à formuler. Mais on peut dire qu'en moyenne il est bien rare qu'un enfant de trois ans et demi à quatre ans ne ma-

nifeste pas déjà son goût pour le maniement du crayon : et j'affirme qu'à dix ou onze ans, il serait facile de lui avoir mis dans la tête la totalité des matières exposées dans ce qui va suivre, s'il a une organisation cérébrale normale.

Plus d'un aura peut-être plaisir, au bout de quelques années, à prendre en main ce petit livre, qui ne lui est pas destiné pour l'instant. Son esprit, perfectionné par des études ultérieures, apte au raisonnement conscient, y trouvera certainement matière à des réflexions utiles.

Pour en finir avec ces généralités et n'avoir pas à me répéter inutilement, je dois signaler aux familles et aux instituteurs qui me liront le plus grand écueil à éviter dans la première éducation de l'enfance ; c'est l'abus de l'exercice de la mémoire, si général encore dans nos pratiques actuelles, et si pernicieux. En apprenant des mots à l'enfant, et le forçant à les répéter, on déforme son cerveau, on tue ses qualités natives, on prépare des générations d'êtres sans initiative, sans curiosité, sans volonté, bourrés de formules incomprises, aveulis et déprimés.

Si vous aimez vos enfants, si vous aimez ceux qu'on vous confie, si vous voulez qu'ils deviennent forts et bons, revenez aux principes de ces grands esprits et de ces grands cœurs, qui eurent nom La Chalotais[1], Frœbel[2], Pestalozzi[3]. Ces bienfaiteurs de l'humanité auraient leurs statues dans tous les pays du monde, et leurs noms seraient gravés en lettres d'or dans toutes les écoles, si la terre était peuplée d'êtres raisonnables.

[1] La Chalotais, magistrat français, né à Rennes (1701-1785), auteur de l'*Essai d'éducation nationale*.

[2] Frœbel, pédagogue allemand, né à Oberweissbach (1782-1852), fondateur des *Jardins d'enfants*.

[3] Pestalozzi, éducateur suisse, né à Zurich (1746-1827) ; sa méthode a servi de base à Fichte, comme moyen de relèvement de l'Allemagne.

2. — De un à dix.

Lorsque l'habitude commencera à être prise, de tracer régulièrement — et assez rapidement — les bâtons, on apprendra à les compter à mesure qu'on les forme, en prononçant les noms, *un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix*, successivement.

Ensuite, on formera des groupes de bâtons, en les séparant les uns des autres par des intervalles, et on aura (fig. 3 et 4) des images qu'on lira :

Fig. 3.

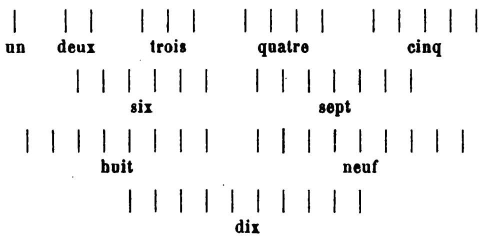
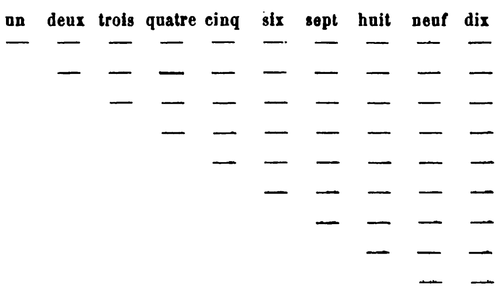


Fig. 4.



un, deux,...... dix bâtons verticaux, pour la fig. 3;
un, deux,...... dix bâtons horizontaux, pour la fig. 4;

En regard, on placera des groupes de haricots, de grains de blé, de jetons ou d'autres objets quelconques, et ils seront énoncés :

un, deux,...... dix haricots, grains de blé, etc.

On supposera ensuite que les objets sont remplacés par des moutons, des chiens, des hommes, etc., et, ces exercices suffisamment répétés, devenus familiers à l'enfant, on pourra lui dire alors que les expressions dont il fait usage : trois bâtons, six grains de blé, huit moutons, par exemple, sont des *nombres* et des *nombres concrets*.

Ayant considéré un groupe de cinq bâtons, un autre de cinq haricots, un autre de cinq jetons, en ayant imaginé un de cinq chiens ou de cinq arbres, on lui fera remarquer que dans ces divers cas, il prononce toujours le même mot *cinq;* on lui dira que ce mot, sans y rien ajouter, représente ce qu'on appelle un *nombre abstrait,* et qu'il pourra s'en servir pour désigner tout autre groupe de cinq objets : ânes, chaises, maisons, etc.

Il ne faudra pas longtemps pour que le bambin sache compter sans hésitation de un jusqu'à dix n'importe quels objets. Il sera bon aussi de l'habituer à saisir le plus tôt possible du regard l'ensemble des objets qu'on lui présentera brusquement, des jetons ou des haricots par exemple, sans avoir besoin de les compter un à un; pour cela, il sera nécessaire de commencer par de très petits nombres, et de procéder progressivement.

3. — Les allumettes ou bâtonnets; paquets et fagots.

En dehors des divers objets indiqués plus haut comme pouvant aider à faire comprendre à l'enfant l'idée de nom-

bre concret, et qu'on peut varier à l'infini, il en est d'autres que nous ne saurions assez recommander, et dont l'emploi est à notre avis indispensable. Ce sont de petits bâtonnets en bois, identiques aux allumettes en bois ordinaires, dont ils ne diffèrent que par l'absence de préparation chimique inflammable. Nous les désignerons parfois sous le nom d'allumettes, à cause de cette ressemblance, et ces allumettes — qui ne s'allument pas — peuvent être considérées comme les modèles des bâtons tracés sur les ardoises ou les cahiers. Elles doivent être toutes de même longueur.

Ayant devant soi un tas de ces bâtonnets, et sachant bien compter jusqu'à dix, l'enfant en mettra de côté dix successivement, et les réunira en un petit paquet bien régulier qu'il entourera d'une de ces petites bagues en caoutchouc si commodes et dont l'emploi est si répandu.

On lui montrera alors que ce *paquet* contenant dix bâtonnets peut être appelé *une dizaine* de bâtonnets.

Ensuite, il confectionnera encore d'autres paquets pareils en assez grand nombre. On vérifiera qu'il ne s'est pas trompé; et s'il s'est trompé, on lui fera réparer son erreur.

Lui montrant alors deux paquets, on lui dira que le nombre de bâtonnets de ces deux paquets, pris ensemble, qu'on mettra sous ses yeux en défaisant et refaisant les paquets, s'appelle *vingt* et qu'ainsi :

un paquet, c'est *dix* bâtonnets,
deux paquets, c'est *vingt* bâtonnets.

Prenant ensuite trois, quatre,...... neuf paquets, et procédant de même, on montrera que

trois	paquets	c'est	trente	bâtonnets
quatre	»	»	quarante	»
cinq	»	»	cinquante	»
six	»	»	soixante	»
sept	»	»	septante	»

huit paquets c'est octante bâtonnets
neuf » » nonante[1] »

Ayant appris tout cela, nous prendrons, pour terminer, dix paquets, et nous les réunirons ensemble au moyen d'une bague de caoutchouc plus large, ce qui nous donnera un *fagot*. On expliquera alors que un fagot c'est une *centaine* de bâtonnets, que le nombre des bâtonnets contenus dans un fagot s'appelle *cent;* on vérifiera que dix paquets formant un fagot, *dix dizaines* c'est *une centaine*.

4. — De un à cent.

Prenant au hasard une poignée de bâtonnets (en nombre inférieur à cent), nous allons proposer à l'enfant de nous mettre avec lui à les compter. Dans ce but, il va fabriquer des paquets, tant que cela lui sera possible; et il arrivera un moment où il n'aura plus assez de bâtonnets pour faire un paquet. Plaçant alors à sa gauche tous les paquets formés, à sa droite les bâtonnets restants, on lui fera énoncer les deux nombres séparément; puis, les réunissant en un seul, il aura ainsi nommé le nombre des bâtonnets qu'on lui avait remis.

Si par exemple il avait formé *trois* paquets, et qu'il lui reste *huit* bâtonnets, il dira en regardant vers la gauche : « trente; » en regardant vers la droite : « huit; » puis, sans interruption : « trente-huit. »

Ayant répété un grand nombre de fois cet exercice, sur des collections de bâtonnets pris au hasard, on démolira

[1] Il faut bien se garder à ce moment de faire connaître à l'enfant les noms absurdes et incohérents : soixante-dix, quatre-vingts, quatre-vingts-dix. Il les apprendra forcément plus tard (et toujours trop tôt). Et même s'il disait dans sa logique : *sixante, huitante, neufante,* il ne serait pas nécessaire de le reprendre.

un fagot, et on se proposera de compter successivement et un à un tous les bâtonnets. On commencera à compter un, deux, trois..... jusqu'à dix. Ayant ainsi un paquet on le fera passer à gauche (sans même avoir besoin de le lier) et on continuera en disant :

dix-un; dix-deux; dix-trois; dix-quatre; dix-cinq; dix-six [1]*; dix-sept; dix-huit; dix-neuf;*

enfin un nouveau bâtonnet complète un deuxième paquet, qu'on fait passer à gauche à côté du premier, en disant *vingt;* et on continue de la même manière jusqu'au neuvième paquet, puis au neuvième bâtonnet restant, qu'on touche en disant *nonante-neuf;* enfin on s'empare du dernier, complétant le dixième paquet qu'on fait passer vers la gauche, à côté des neuf premiers, en prononçant le mot: *cent.*

Rien n'empêche de faire remarquer alors au jeune élève qu'on vient de lui enseigner la *numération* de un à cent ; on pourra même lui dire que lorsqu'il dit : septante-trois allumettes ou bâtonnets, il fait de la *numération parlée,* et que lorsqu'il range sept paquets à gauche et trois bâtonnets à droite, il fait de la numération *figurée.* Il sera d'autant plus flatté de se sentir si savant qu'il ne sait encore ni tracer une lettre ou un chiffre, ni lire : b, a, ba. Mais il dessine des bâtons, il a des yeux, s'en sert pour voir et commence à comprendre ce qu'il voit et ce qu'il fait.

Nous savons donc compter des bâtonnets de un à cent. Il faut nous habituer à compter de même d'autres objets quelconques, puis à les compter de tête ensuite sans les avoir sous les yeux. C'est le début du *calcul mental,* si important dans la pratique, et si facile à faire pratiquer dès le plus

[1] Ici encore il faut se garder de dire : onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize. Ces noms s'apprendront sans aucune peine, le moment venu. Inutile, quant à présent, de surcharger la mémoire.

jeune âge, si on commence par des choses très simples et si on procède progressivement.

Ce n'est pas tout encore; partant de 1, il faut s'habituer à compter de deux en deux :

un, trois, ... jusqu'à nonante-neuf

et expliquer que tous ces nombres sont des *nombres impairs*.

On fera de même en partant de deux ;

deux, quatre, six, ... jusqu'à cent,

et on aura des *nombres pairs*.

On s'habituera ensuite à compter de trois en trois, de quatre en quatre, en partant de un, pour commencer, puis d'un nombre quelconque.

Tous ces exercices se feront sur des objets d'abord — les bâtonnets de préférence, — ensuite mentalement.

Bref, cette manipulation des nombres, de un à cent, pourra se varier indéfiniment, car il ne faudra pas craindre de la prolonger, tant qu'elle ne deviendra pas fastidieuse et qu'elle intéressera l'enfant. Il sera bon de l'y ramener de temps en temps, alors même qu'il aura pénétré un peu plus avant dans son *initiation scientifique*.

5. — La table d'addition.

Rangeons de gauche à droite sur une table, un, deux . . . jusqu'à neuf bâtonnets, en séparant ces neuf groupes les uns des autres. Au-dessous du bâtonnet unique, plaçons-en deux, et formons une colonne qui commencera par un, deux, pour arriver ainsi jusqu'à dix. Une seconde colonne, formée de la même façon comprendra deux, trois,. . . . . dix-un

bâtonnets; et en continuant de la même manière, nous aurons neuf colonnes; le dernier groupe de la neuvième colonne sera de dix-huit bâtonnets.

C'est l'occasion maintenant de revenir à l'utilisation de notre habileté de dessinateur et de notre grande aptitude à tracer des bâtons. Seulement, comme il est ennuyeux de tracer les dix bâtons figurant les bâtonnets d'un paquet, nous formerons l'image d'un paquet par un gros bâton plus fort que les autres, formé de deux traits **H**, avec une petite barre qui rappelle la présence de la bague en caoutchouc. Nous avons donc ainsi commencé à savoir écrire les nombres avec des bâtons, et en copiant de la sorte la figure dont nous venons d'indiquer la formation, nous obtiendrons la fig. 5, au moins en partie. Pour la terminer, nous mettrons un, deux, . . . neuf bâtons, à gauche des deux, trois, . . . dix de la première colonne; enfin, nous séparerons par un trait vertical cette nouvelle colonne du reste de la figure et nous séparerons aussi la première ligne par un trait horizontal.

La figure ainsi obtenue est une *table d'addition;* nous verrons bientôt pourquoi on l'appelle ainsi.

Elle se prête à plusieurs remarques intéressantes, que le constructeur découvrira en partie. D'abord tous les nom-

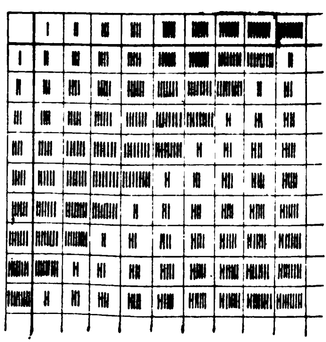


Fig. 5.

bres dans une même ligne oblique remontant de gauche à droite sont pareils; de plus, tous les nombres lus de gauche à droite dans une ligne horizontale, ou de haut en bas dans une colonne sont des nombres comptés de un en un; enfin les nombres dans une même ligne oblique descendant de gauche à droite, si on les lit en descendant, sont des nombres comptés de deux en deux. Tantôt, ils sont pairs; tantôt impairs.

Rien n'empêchera de lire tous ces nombres dans l'ordre inverse, ce qui nous apprendra à énoncer couramment les nombres, de un en un, ou de deux en deux, dans le sens opposé à l'ordre naturel. C'est encore un exercice fort important, souvent utile, dont nous n'avons pas encore parlé, et que nous pouvons aborder maintenant pour des nombres petits, qui ne présenteront aucune sérieuse difficulté.

6. — Les sommes.

Prenons deux tas de haricots (ou d'autres objets) et comptons-les l'un et l'autre. Si on les réunit en un seul tas, combien en aurons-nous en tout? Il n'y a pour cela qu'à recommencer à compter à son tour le tas formé par la réunion des deux autres. Mais ce sera bien long, et ce serait du temps perdu, et de l'ennui.

Nous expliquerons qu'il y a un moyen plus rapide d'arriver au but, qu'on va y arriver par une opération qui s'appelle *addition*, et que le nombre des objets contenus dans le gros tas, et que nous voulons trouver, s'appelle *total* ou *somme*.

Prenant alors des nombres plus petits que dix, et reprenant la figure 5, nous ferons remarquer qu'elle donne toutes les sommes de deux tas, et nous inviterons l'enfant à tâcher de se les rappeler. Nous y arriverons, en répétant ces exercices, le plus souvent possible, et en faisant compter directement la somme quand on ne se rappelle pas.

Avant même que cette table d'addition soit complètement fixée dans la mémoire, nous prendrons deux nombres quelconques — choisis de manière que leur somme soit plus petite que cent — et nous les compterons tous deux séparément. Nous les figurerons alors avec des bâtonnets; soient trente-quatre et vingt-trois.

Le premier nombre se formera de trois paquets et quatre bâtonnets; l'autre de deux paquets et trois bâtonnets qu'on placera en-dessous; paquets sous paquets (à gauche); bâtonnets sous bâtonnets (à droite).

On demandera alors à l'enfant de dire combien font quatre et trois bâtonnets; il répondra sept, en s'aidant s'il le faut de la table d'addition, et il placera sept bâtonnets un peu au-dessous. De même : combien font trois et deux paquets? Cinq paquets, qu'on placera sous les paquets. On a ainsi le total : cinq paquets, sept bâtonnets, ou cinquante-sept bâtonnets.

On recommencera avec d'autres nombres, on en prendra où il n'y ait que des paquets et pas de bâtonnets isolés, comme soixante, vingt, octante; d'autres où il n'y ait pas de paquets, c'est-à-dire inférieurs à dix; mais de façon que chaque somme de bâtonnets ou de paquets soit toujours elle aussi inférieure à dix.

Arrivés à ce point, nous prendrons d'autres nombres où il n'en soit plus ainsi; par exemple quarante-neuf et vingt-cinq.

L'opération se disposera ainsi :

quatre paquets	neuf bâtonnets,
deux paquets	cinq bâtonnets.

Nous avons alors neuf et cinq, ou dix-quatre bâtonnets; cela nous donne un paquet — que nous faisons passer au-dessus des paquets — et quatre bâtonnets. Comptant alors les paquets, en commençant par celui que nous venons de former, nous avons un et quatre, cinq; cinq et deux pa-

quets : sept. Le total est donc sept paquets et quatre bâtonnets, ou septante-quatre.

Cet exercice devra être répété, renouvelé à satiété, avec des exemples variés, mais tant que cela intéressera l'enfant, sans jamais prolonger la séance jusqu'à l'ennuyer.

Arrivant alors à des additions de plusieurs nombres, on procédera de la même manière (en s'arrangeant toujours pour que le total soit inférieur à cent), et on observera que l'on trouve ainsi le nombre formé par la réunion de plusieurs tas, quand on connaît le nombre qu'il y a dans chacun des tas[1].

Répétez encore ces exercices sur une foule d'exemples, tant qu'ils ne produiront pas la fatigue ou l'ennui. Si l'on croyait voir chez l'enfant une sorte de mauvaise volonté, la punition consisterait en une menace — suivie d'effet, pendant quelques jours — de ne plus continuer à lui montrer les jeux de bâtonnets, de jetons, etc., qu'on a commencé à apprendre. Qu'on use avec quelque habileté de ce moyen, et on verra qu'il n'est pas difficile de ramener d'eux-mêmes les *coupables* à leurs études. Seulement, ne prononcez pas à leurs oreilles ce vilain mot d'étude, qui pourrait les effaroucher.

7. — Les différences.

J'ai un gros tas de jetons : octante-sept par exemple ; j'en enlève (ou retranche) une pincée, que je compte ; j'en trouve vingt-cinq. Combien en reste-t-il ? Trouver cela, c'est faire une *soustraction ;* le résultat, c'est le *reste* ou la *différence ;*

[1] Ces exercices obligeront, en dehors de la table d'addition, à savoir ajouter rapidement un nombre plus petit que dix à un nombre plus petit que cent ; par exemple : soixante-huit et cinq, septante-trois. Ce résultat s'obtiendra par l'usage, avec un peu de patience, et assez rapidement.

on remarque que si on réunit le reste au nombre retranché, on reforme le gros tas, c'est-à-dire le nombre dont on retranche.

Pour trouver la différence, écrivons d'abord le plus gros nombre, octante-sept, avec des bâtonnets.

huit paquets sept bâtonnets

et en dessous le plus petit, vingt-cinq :

deux paquets cinq bâtonnets

en ayant bien soin de mettre les paquets à gauche, les simples bâtonnets à droite, et de placer les bâtonnets sous les bâtonnets, les paquets sous les paquets.

Dans le nombre le plus gros, je prends cinq bâtonnets; il m'en restera deux; je prends deux paquets; il m'en restera six.

J'aurai donc le reste :

six paquets deux bâtonnets

ou soixante-deux bâtonnets.

Cela va tout seul, et nous sommes arrivés à trouver la différence, rien qu'en faisant celles de nombres plus petits que dix, puisque nous avons retranché cinq de sept, et puis deux de huit.

Mais ce n'est pas toujours aussi facile. Ainsi, que le gros tas soit de cinquante-deux, et celui qu'on veut enlever, de dix-huit, qui est certainement plus petit. En faisant comme tout à l'heure

cinq paquets deux bâtonnets
un paquet huit bâtonnets,

nous ne pouvons plus enlever huit bâtonnets de deux. Alors, parmi les cinq paquets, nous en prenons un que nous met-

tons à droite, avec les deux bâtonnets. Qu'on le défasse ou non, nous voyons bien que cela nous fera, à droite dix-deux bâtonnets, et à gauche nous n'aurons plus que quatre paquets au lieu de cinq.

Alors, des dix-deux bâtonnets qui sont à droite, nous en enlevons huit; il en restera quatre; des quatre paquets qui restent à gauche, nous en enlevons un; il en reste trois.

La différence est donc

trois paquets quatre bâtonnets,

ou trente-quatre.

Il faut ici savoir retrancher un nombre plus petit que dix, d'un nombre plus grand que dix, mais qui sera toujours plus petit que vingt.

En multipliant beaucoup ces exercices, en les variant le plus possible, ces différences, qu'il faut connaître, se logeront vite dans la mémoire; mais qu'on se garde de les faire apprendre par cœur et réciter. C'est l'usage répété qui les fera retenir.

Il faut bien faire attention de ne prendre jamais, pour plus grand nombre, qu'un nombre inférieur à cent, puisque jusqu'ici nous ne savons pas compter au delà.

8. — Les mille et les millions.

Jusqu'à présent, nous savons compter jusqu'à cent. C'est un grand nombre si on considère l'âge d'une personne en années; un homme qui a cent ans est très vieux, et les centenaires sont bien rares. Mais c'est un nombre bien petit si nous regardons seulement des grains de blé; un tas de cent grains de blé n'est pas gros, et ne suffirait pas à nourrir par jour un enfant. Il est donc impossible de s'arrêter là, et il nous faut monter bien plus haut sur l'échelle; ce ne sera pas difficile.

Nous sommes arrivé à cent en groupant des bâtonnets par paquets de dix, et en groupant dix paquets en un fagot, qui contient une centaine de bâtonnets ou cent bâtonnets. Réunissons dix fagots en une boîte; puis, avec dix boîtes pareilles, formons un ballot; dix ballots pourront être réunis sur une hotte; avec dix hottes, nous formerons une caisse; avec dix caisses, une charrette; avec dix charrettes, un wagon; et avec dix wagons, un train.

Reprenant tout ceci, nous allons donner les noms des nombres que nous obtenons de la sorte.

Une allumette ou *un* bâtonnet, c'est ce que nous nommerons une *unité simple;*

Dans un *paquet,* nous avons *dix* allumettes, ou une *dizaine;*

Dans un *fagot* de dix paquets, *cent* allumettes, ou une *centaine;*

Dans une *boîte* de dix fagots, *mille* allumettes;

Dans un *ballot* de dix boîtes, *dix mille* allumettes, ou une *dizaine de mille;*

Dans une *hotte* de dix ballots, *cent mille,* ou une *centaine de mille;*

Dans une *caisse* de dix hottes, *un million;*

Dans une *charrette* de dix caisses, *dix millions,* ou une *dizaine de millions;*

Dans un *wagon* de dix charrettes, *cent millions,* ou une *centaine de millions;*

Dans un *train* de dix wagons, *un milliard.*

On pourrait continuer comme cela tant qu'on voudrait; mais le nombre de un milliard auquel nous sommes arrivé est assez grand pour suffire aux usages ordinaires. On s'en fera une idée en remarquant que si on plaçait, les unes au bout des autres, des allumettes ordinaires en bois, au nombre de un milliard, la longueur totale dépasserait sensiblement le tour de la terre.

En essayant de compter, une à une, un milliard d'allumettes, supposant qu'on mette une seconde pour chacune,

et qu'on s'occupe à ce petit compte dix heures par jour, il faudrait plus de septante-six ans. Ce serait peut-être un peu long, pas très amusant et faiblement instructif.

Si nous voulons maintenant compter un gros tas de bâtonnets, nous allons en faire des paquets, et nous mettrons à droite les bâtonnets qui nous resteront, une fois les paquets faits ; soit *trois* bâtonnets. Nous fabriquons maintenant des fagots avec nos paquets, en les réunissant par dix ; supposons qu'il nous reste *huit* paquets ; nous les plaçons à gauche des trois bâtonnets, et nous comptons nos fagots dix par dix pour en faire des boîtes ; il nous reste *cinq* fagots ; nous les plaçons à gauche des huit paquets ; et en comptant nos boîtes, nous en trouvons *six*. Nous les mettons à gauche des cinq fagots ; et nous avons ainsi le nombre des bâtonnets :

six boîtes, *cinq* fagots, *huit* paquets, *trois* bâtonnets.

ou six-mille cinq-cent octante trois bâtonnets.

Rien qu'avec les paquets et les fagots nous pourrons compter jusqu'à mille, et former tous les nombres jusqu'à celui-là, en n'oubliant jamais que

fagot paquet bâtonnet unique

veulent dire :

(cent dix un) bâtonnets.

Si dans le nombre qu'on veut écrire il n'y a pas de bâtonnets isolés, ou pas de paquets, cela ne gênera en rien. Par exemple

huit fagots six paquets

contiendront huit-cent soixante bâtonnets,

et cinq fagots trois bâtonnets

en contiendront cinq-cent trois.

Il faudra faire former ainsi beaucoup de nombres inférieurs à mille, et faire faire beaucoup d'additions et de soustractions, exactement comme il a été indiqué précédemment, mais en étendant les procédés jusqu'aux fagots, au lieu de s'en tenir aux paquets.

Il est bon de remarquer que l'on retrouve plusieurs fois les mêmes nombres dix et cent, ou dizaines et centaines. Ainsi

bâtonnet paquet fagot		un une dizaine une centaine
boîte ballot hotte	veulent dire	un mille une dizaine de mille une centaine de mille
caisse charrette wagon		un million une dizaine de millions une centaine de millions

Un nombre de mille, ou de millions, se comptera donc comme on compterait de simples bâtonnets de un à mille. Ainsi

trois wagons	deux charrettes	sept caisses
une hotte		neuf boîtes
quatre fagots	cinq paquets	

sera un nombre de bâtonnets qu'on exprimera

trois-cent vingt sept millions cent neuf mille quatre-cent cinquante	bâtonnets.

On pourra en faire compter quelques-uns, comme cela, mais sans insister sur de trop gros nombres pour le moment,

et s'attacher surtout aux paquets et aux fagots, tout au plus aux boîtes.

Toujours, dans ce qui précède, nous avons eu soin de mettre les bâtonnets (unités) à droite, les paquets (dizaines) à leur gauche, les fagots (centaines) à gauche des paquets, et ainsi de suite. On devra remarquer qu'à la rigueur ce serait inutile, mais que c'est plus commode, et qu'il est bon de toujours observer ce rangement parce que le comptage se fait ainsi avec ordre. Un peu plus tard, l'enfant, ayant bien pris cette habitude, la trouvera naturelle, alors qu'elle sera devenue indispensable au calcul.

Pour former effectivement, avec des bâtonnets, tous les nombres dont nous venons de parler, et dont il est bon de parler pour fixer l'esprit de l'enfant, il faudrait un matériel un peu encombrant, et pas très facile à placer sur une table ou sur une feuille de papier, même avant d'être rendu aux wagons. Nous allons voir comment on peut simplifier les choses, et montrer au jeune mathématicien — qui ne sait pas encore lire ni écrire couramment — qu'il est parfaitement à même de manier de ses doigts les nombres énormes dont il s'agit.

9. — Les jetons de couleur.

C'est bien désagréable, d'être si encombré, dès qu'il faut compter seulement un mille d'allumettes, par nos paquets et nos fagots. Comme nous savons déjà que les nombres s'appliquent à n'importe quoi, remplaçons nos allumettes par des jetons blancs. Cela ne change rien à nos comptes, ni à la manière de les faire. Maintenant, remplaçons nos paquets par des jetons rouges ; ce sera déjà plus commode à manier, et nous pourrons toujours remplacer, si cela nous est nécessaire, un jeton rouge par dix jetons blancs. Continuons : à

la place des fagots, nous mettrons des jetons orangés ; à la place des boîtes, des jetons jaunes ; à la place des ballots, des jetons verts ; à la place des hottes, des jetons bleus ; à la place des caisses, des jetons indigos ; à la place des charrettes, des jetons violets ; à la place des wagons, des jetons noirs ; enfin à la place des trains, des jetons allongés (et blancs).

Les objets, et les nombres, se correspondent donc ainsi :

Allumettes	Trains Wagons Charrettes Caisses Hottes Ballots Boîtes Fagots Paquets Allumettes
Jetons	Allongés Noirs Violets Indigos Bleus Verts Jaunes Orangés Rouges Blancs
Nombres	Milliards, Centaines de millions, Dizaines de millions, Millions, Centaines de mille, Dizaines de mille, Milles, Centaines, Dizaines, Unités.

Rien ne nous empêche donc d'écrire tous les nombres que nous voudrons, jusqu'à un milliard, et même au delà, avec nos tout petits jetons, sans avoir besoin pour cela d'amener des caisses, des wagons et même des trains ; et nous pourrons également, si cela nous intéresse, faire des additions et des soustractions. Il faudra, par exemple, toujours bien se rappeler qu'un jeton rouge vaut dix blancs ; un jeton orangé, dix rouges, et ainsi de suite jusqu'au bout.

Il semble qu'à la place des jetons blancs, on pourrait mettre des pièces de un centime, puis remplacer les jetons rouges par des pièces de dix centimes, et continuer comme cela ; mais cela deviendrait gênant et encombrant, et il faudrait avoir une assez jolie petite fortune ; car alors, pour représenter les milliards, il serait nécessaire d'employer des *pièces* de dix millions de francs. La monnaie n'en frappe pas ; elles seraient peu maniables, et il vaut décidément mieux se con-

tenter du jeton blanc allongé pour représenter le milliard. Ce sera plus économique.

Toujours, comme plus haut, nous mettrons nos jetons bien en ordre, en commençant par la droite :

Allongé	Noir	Violet	Indigo	Bleu	Vert	Jaune	Orangé	Rouge	Blanc

et rien qu'à regarder chaque place, on sait quelle couleur doit y être logée, d'après le rang qu'elle a, à partir de la droite.

10. — Les chiffres.

Nous savons maintenant écrire tous les nombres, au moins jusqu'aux milliards — et il serait facile de pousser bien plus loin — avec nos jetons ronds de diverses couleurs, et des jetons blancs allongés. Pour cela, il nous faut, à chacune des places qui marquent les jetons blancs, rouges, etc., ou les unités, les dizaines, etc., mettre un nombre de jetons qui est toujours plus petit que dix.

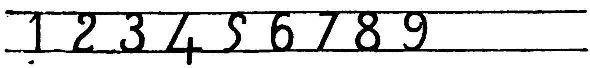
S'il y avait moyen d'éviter de compter chaque fois ces jetons, ce serait plus commode. Or, maintenant, notre élève a commencé à écrire un peu, et nous pouvons l'exercer à tracer des caractères qui représenteront les neuf premiers nombres dont nous avons besoin, caractères qu'on appelle les *chiffres*.

Ce sont

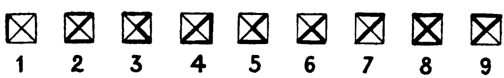
un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Soit avec un crayon, soit avec une plume, qu'il s'habitue à les former droits, sans aucune fioriture, d'un seul trait, sauf le 4, qui en exige deux, et en se servant d'abord d'ardoises réglées ou de papier réglé, pour que les chiffres soient bien tous de la même hauteur. Ceci est de la plus haute importance pour la pratique future du calcul.

Voici le type auquel il faudra se tenir en principe



Comme curiosité, on pourra faire remarquer que tous ces chiffres, au dire de quelques vieux auteurs, tirent tous leur origine de la figure  comme on le voit ci-dessous; mais ce n'est pas bien certain.



L'important, c'est de faire traduire des nombres de bâtonnets en jetons, de jetons en chiffres, en ne prenant pas de très gros nombres, surtout pour commencer. Nous remarquerons que nous n'avons pas besoin de faire nos chiffres de différentes couleurs, puisque la place qu'ils occupent nous permet facilement de savoir s'ils représentent des unités simples, des dizaines, des centaines, etc. (ou des jetons

blancs, rouges, orangés, etc., ou encore des bâtonnets, des paquets, des fagots, etc.).

Mais ici arrive une observation importante. S'il n'y a pas du tout de jetons d'une certaine couleur, tout à l'heure nous ne mettions rien. Comme à présent nous ne distinguons plus les couleurs que par le rang de chacun des chiffres, si nous ne mettions rien, cela conduirait à tout embrouiller, car nous devrions laisser une place vide, toujours bien égale à la largeur d'un chiffre, et on n'est pas assez habile pour écrire toujours si régulièrement. En outre, si l'absence avait lieu dans les unités, comment pourrions-nous savoir ce que signifie le dernier chiffre à droite? Pour éviter tous ces ennuis, on met, aux places non occupées, un caractère rond, 0, qu'on appelle *zéro*[1], qui n'a aucune valeur, mais qui occupe la place. C'est un bon serviteur modeste qui garde la maison, et qui vous dit : il n'y a personne ici; moi, je ne compte pas, je ne suis rien; mais je défends qu'on entre.

Dès lors, nous pouvons, en multipliant et variant beaucoup les exercices, faire écrire quantité de nombres, faire lire beaucoup de nombres écrits, en usant souvent du zéro. S'il y a plusieurs élèves, on peut les mettre en concurrence, piquer légèrement leur émulation, les amener de plus en plus à lire et à écrire vite et correctement, et leur déclarer en fin de compte qu'ils connaissent maintenant la *numération écrite*.

Une fois là, il est bon de reprendre les exemples d'additions et de soustractions, qu'on a su traiter précédemment avec des bâtonnets ou des jetons, en se servant à présent des chiffres. Mais il y aura quelques observations utiles à faire, très utiles même, qui auparavant n'auraient pas eu leur place. L'une d'elles concernant l'addition, consiste à habituer l'élève à parler le moins possible, à ne jamais dire par exemple : je pose tel chiffre, et je retiens tel nombre.

[1] On ne sait pas quel fut l'inventeur du zéro. Mais cette idée de génie paraît être d'origine hindoue.

Il me suffira, pour me faire comprendre, de l'exemple d'addition ci-contre, qu'on devra traduire ainsi, en langage parlé : 7 et 4 : dix-un, et 8 : dix-neuf, et 9 : vingt-huit, et 4 : trente-deux. — On écrit 2, sans rien dire; puis on ajoute : je retiens 3, et 8 : dix-un, et 4 : dix-cinq, et 6 : vingt-un, et 2 : vingt-trois (on écrit 3). Je retiens 2, et 9 : dix-un, et 5 : dix-six, et 2 : dix-huit (on écrit 8). Je retiens 1, et 3 : 4, et 6 : dix, et 2 : dix-deux. On écrit 2, puis 1 à sa gauche. Et on lit le total : dix deux-mille, huit-cent trente deux.

$$\begin{array}{r} 3087 \\ 6944 \\ 560 \\ 208 \\ 29 \\ 2004 \\ \hline 12832 \end{array}$$

Une seconde remarque concerne la pratique de la soustraction, lorsqu'il y a au plus grand nombre, à un certain rang, un chiffre plus petit que celui qu'on lit au-dessous. Reprenons l'exemple du n° 7; de 52 il faut enlever 18.

$$\begin{array}{r} 52 \\ 18 \\ \hline 34 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ 1 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ 8 \\ \hline 4 \end{array}$$

Ce que nous avons fait avec nos bâtonnets se trouve traduit ci-dessus. Mais il ne faut pas qu'on ait à écrire autre chose que 52 et 18, avant le résultat de l'opération ; et il peut très bien arriver qu'on oublie que l'on s'est emparé d'une dizaine en haut, et qu'il n'en reste plus que 4 au lieu de 5. Dès lors, on procède autrement, en remarquant que retrancher 1 de 4, c'est la même chose que retrancher 2 de 5. On dira alors : 8, de dix-deux : 4, (on écrit 4) ; je retiens 1, et 1, 2, de 5 : 3. On prend ainsi l'habitude de retenir 1, chaque fois qu'on a préalablement ajouté dix au chiffre d'en haut.

Beaucoup d'exercices d'addition, et de soustraction, devront ainsi être poursuivis. L'enfant s'y intéressera ; mais ne cherchez pas à lui rien démontrer. S'il semble quelque-

fois embarrassé, ramenez-le à ses jetons ou à ses bâtonnets; et ne cherchez qu'à lui donner la pratique du calcul, et non à lui faire apprendre des mots incompris. Si des remarques lui viennent à l'esprit, et s'il en fait part, écoutez-le avec grande attention. Ne craignez pas de revenir en arrière de temps en temps, afin de l'habituer à assimiler ses nombres, écrits en chiffres, avec les collections de bâtonnets, de jetons ou d'objets quelconques. Et par-dessus tout, ne prolongez pas les séances, ne laissez pas faiblir l'intérêt et survenir la fatigue; c'est le plus mortel fléau de l'enseignement.

Si vous le jugez convenable, vous pouvez désormais, bien que rien ne presse, initier l'élève aux noms vulgaires des nombres 11, 12, 13, 14, 15, 16. Mais n'abandonnez pas encore septante, octante, nonante, pour désigner 70, 80, 90.

11. — Les bâtons bout à bout.

Reprenons les bâtonnets que nous avons employés déjà; supposons que nous en ayons trois tas, par exemple, dans lesquels il y a 5, 3 et 4 bâtonnets. Si nous mettons tous les bâtonnets à la suite les uns des autres dans une même direction, la longueur de cette file sera de 12 bâtonnets, c'est-à-dire donnera la somme des nombres représentés par les trois tas.

On arriverait au même résultat, en remplaçant les bâtonnets, du premier tas par une tige ayant la longueur de 5 bâtonnets, celle du 2ème tas par une tige dont la longueur serait celle de 3 bâtonnets, et ceux du 3ème tas par une tige dont la longueur serait celle de 4 bâtonnets.

Si au lieu de ces nombres très petits on en prenait de plus grands, et si au lieu de 3 nombres on en prenait autant qu'on voudrait, tout ce qui vient d'être dit pourrait se répéter. Les

tiges seraient plus longues, il y aurait plus de 3 tiges, et voilà tout.

Nous constatons ainsi qu'un nombre quelconque peut être représenté par une tige de longueur convenable, et que pour faire la somme de plusieurs nombres, il n'y a qu'à porter bout à bout, les unes à la suite des autres, les tiges qui les représentent. La longueur de la file de tiges ainsi obtenue sera la somme cherchée.

12. — La ligne droite.

Les tiges dont nous venons de parler, dans les opérations indiquées, doivent toujours être placées *en ligne droite*, à la suite les unes des autres. Qu'est-ce que c'est donc, une ligne droite ? Nous en avons l'idée par le trait que trace un crayon très pointu glissant le long d'une règle bien dressée; ou par un fil extrêmement fin, un cheveu par exemple, tendu entre deux supports. Cette notion générale nous suffit, nous sentons très bien que si par exemple la règle était plus longue, la feuille de papier plus large, nous pourrions tracer plus loin notre ligne droite, soit d'un bout, soit de l'autre; et comme il n'y a pas de raison pour jamais s'arrêter, nous comprenons que la ligne droite est, comme on dit, une figure indéfinie. Nous ne nous en servirons jamais que jusqu'au terme où nous en aurons besoin, mais ce terme pourra être aussi éloigné qu'il nous plaira.

Si nous prenons une droite (fig. 6) et si nous marquons un point A, et un autre point B, la portion de droite AB com-

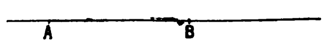


Fig. 6.

prise entre ces deux points est ce qu'on appelle un *segment de droite*. Les tiges que nous avons employées tout à l'heure s'appliquent donc sur des segments de droite, et la longueur de ces tiges est la même que celle des segments sur lesquels elles s'appliquent.

Ainsi (fig. 7) pour revenir à l'exemple du numéro pré-

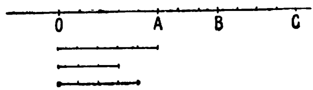


Fig. 7.

cédent, prenons une ligne droite sur laquelle nous plaçons un point O, n'importe où ; à partir de ce point, portons un segment OA qui a la même longueur que notre 1[ère] tige, 5 bâtonnets ; à partir de A, portons un segment AB ayant pour longueur celle de la 2[ème] tige, 3 bâtonnets ; puis à partir de B, un autre BC dont la longueur est celle de la 3[ème] tige, 4 bâtonnets. Le segment OC aura pour longueur 12 bâtonnets, somme de 5, 3 et 4. Dire qu'on ajoute les nombres, les tiges, les segments de droite, c'est toujours la même chose. Et l'addition se fait en portant les tiges, ou les segments, bout à bout, les uns à la suite des autres.

Cette opération doit nécessairement se faire en portant les segments dans un même sens ; nous supposerons que c'est de notre gauche vers notre droite, invariablement.

Dans la figure 7, nous pourrons ainsi trouver des sommes qui iront aussi loin que nous voudrons, à droite de O, mais jamais rien à gauche.

13. — Les différences par bâtonnets.

Il n'est pas plus difficile de chercher une différence qu'une somme, en nous servant de bâtonnets. Supposons par exem-

ple que de 11 il s'agisse de retrancher 4. Nous porterons 11 bâtonnets bout à bout en ligne droite; puis, en commençant par le bout à droite de cette file, nous enlèverons 4 bâtonnets; il nous restera une file de 7 bâtonnets; 7 est la différence entre 11 et 4.

Si on commençait par placer une tige longue de 11 bâtonnets, il faudrait, semble-t-il, en recouper un bout long de 4, pour avoir la différence. Mais il y a un autre moyen, qu'on va comprendre tout de suite (fig. 8) en parlant de segments au lieu de tiges. Portons sur une droite, à partir du point O, un segment OB long de 11 bâtonnets. A partir de B, portons un segment long de 4 bâtonnets, mais au lieu de le supposer tracé de gauche à droite, menons-le au contraire en BC de droite à gauche. Le segment OC représentera par sa longueur la différence 7.

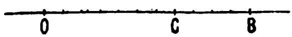


Fig. 8.

On résume quelquefois ceci en disant que pour ajouter plusieurs segments, il faut les porter bout à bout *dans le même sens;* et que pour retrancher un segment d'un autre, il faut le porter bout à bout à la suite de cet autre, mais *en sens contraire.*

Toutes ces choses, d'ailleurs, sont non seulement faciles, mais évidentes; il suffit de varier un peu les exemples pour y intéresser l'enfant; il ne faut pas craindre non plus de lui faire manipuler le plus possible de bâtonnets, tiges (bien simples à se procurer) et reproduire ses opérations sur une ardoise ou un papier.

Il va maintenant pénétrer dans les régions de la « haute science ». S'il faisait mine de s'en enorgueillir, calmez et réfrénez cette manifestation, en lui rappelant, d'une part que l'Algèbre est l'une des parties les plus faciles de la science mathématique, et en second lieu, qu'il ne sait rien, n'apprend rien quant à présent, sinon des jeux qui lui serviront plus tard, grâce au souvenir qu'il en aura gardé.

14. — Nous entrons dans l'Algèbre.

Jusqu'à présent nous avons appris à faire des additions, donnant des sommes, et des soustractions, donnant des différences. Par exemple, la somme de 8, de 5 et de 14 est 27. On a imaginé un signe, +, qui représente l'addition, et qui, s'énonce *plus*, et aussi un symbole = qui s'énonce *égale*. En sorte que le résultat que nous venons de rappeler pourra s'écrire

$$8 + 5 + 14 = 27$$

et se lira : 8 plus 5 plus 14 égale 27.

De même, pour la soustraction, on se sert d'un signe, —, qui s'énonce *moins*, et si on écrit

$$7 - 5 = 2$$

Cela se lira : 7 moins 5 égale 2, ce qui veut dire qu'en retranchant 5 de 7, on obtient 2 comme différence.

Toutes les opérations de cette nature pourront se traduire par des tiges ou des segments, comme nous l'avons vu précédemment. Ainsi, en regardant la figure 7, nous voyons qu'elle signifie

$$5 + 3 + 4 = 12.$$

et que cela peut encore s'écrire

$$OA + AB + BC = OC$$

La figure 8 signifie,

$$11 - 4 = 7.$$

et on peut s'amuser à en faire ainsi tant qu'on voudra, et à traduire les opérations sous ces différentes formes.

On comprend qu'à la place de 8, 5, 14, ou de 5, 3, 4 dans les exemples ci-dessus, on pourrait mettre n'importe quels autres nombres ; si on les appelle a, b, c, en écrivant $a + b + c = s$, on exprimera toujours la somme de trois nombres ; cette somme serait 27 dans le premier exemple, 12 dans le second.

De même, $a - b = r$ exprime que la différence obtenue en retranchant b de a est égale à r. Par exemple, dans la figure 8, $a = 11$, $b = 4$, et $r = 7$.

C'est souvent très commode, d'indiquer ainsi des opérations par des signes, et de remplacer les nombres par des lettres. Il est bon de s'y accoutumer de bonne heure, car cela servira beaucoup dans l'avenir, et évitera bien des peines. Il faut même savoir ce que signifie

$$(\quad) + (\quad) \text{ ou } (\quad) - (\quad)$$

quand on met quelque chose à l'intérieur des parenthèses. Cela veut dire tout simplement qu'on devra remplacer chaque expression comprise entre parenthèses par le résultat qu'elle fournit. Par exemple

$$(a - b) - (c - d) + (e - f)$$

si a, b, c, d, e, f

sont remplacés par 10 2 9 6 7 5

voudra dire $(10 - 2) - (9 - 6) + (7 - 5)$

ou $8 - 3 + 2$, c'est-à-dire 7.

Toutes ces écritures sont quelquefois appelées *algébriques*. Mais les mots n'ont que peu d'importance ; ce sont les choses qui en ont. Et ce qui suit va nous montrer des choses nouvelles.

En ajoutant des nombres nous ne sommes jamais arrêtés. Quand on a plusieurs tas de haricots on peut toujours les réunir en un seul tas. L'addition, en d'autres termes, est toujours possible, et nous pouvons la traduire en chiffres, en jetons, en allumettes, en bâtons, en tiges, en segments de droite, comme il nous plaît.

Il n'en va pas de même de la soustraction. Si j'ai un tas de 7 jetons, par exemple, et que je veuille en enlever 10, la chose, ainsi que nous l'avons remarqué déjà, est manifestement impossible.

Cependant, si nous reprenons ce qui a été dit plus haut, et ce que traduit la figure 8, il faudrait, pour faire la soustraction au moyen de tiges, ou de segments de droite, porter (fig. 9) sur une droite un segment OB ayant pour longueur 7 allumettes, puis au bout porter *en sens contraire*, c'est-à-dire de droite à gauche, un segment dont la longueur soit le nombre à retrancher ; or, ceci est toujours possible ; et la figure 9 nous le montre, en supposant comme nous l'avons fait que ce nombre à retrancher soit 10 ; nous obtenons ainsi, la longueur BC étant 10, un point C, et nous avons pour reste le segment OC ; seulement, le point C n'est plus ici à la droite du point O ; il est à gauche ; le segment OC est dirigé de droite à gauche, et sa longueur est égale à 3.

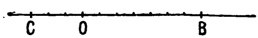


Fig. 9.

Un tel nombre est dit *négatif ;* on l'écrira — 3, on l'appellera *moins* 3 ; et on aura le droit d'écrire ainsi

$$7 - 10 = -3$$

Cette création des nombres négatifs rend donc possibles toutes les soustractions qui ne l'étaient pas avec les nombres ordinaires, qu'on appelle, par opposition, *nombres positifs*.

Sur la figure 10, toute la partie à droite du point O représente le domaine des nombres positifs, ou de l'Arithmé-

tique (flèche 1); toute la partie à gauche (flèche 2) représente le domaine des nombres négatifs; et l'ensemble des deux flèches, comprenant la ligne droite tout entière, dans les deux sens, représente le domaine de l'Algèbre.

Il faudra donc maintenant, quand nous voudrons représenter des nombres par des tiges, ou des segments, faire attention au *sens* de ces segments, ou au signe du nombre; ainsi (fig. 9), OB sera un segment positif, représentant le nombre 7, ou + 7; OC sera un segment négatif représentant le nombre — 3, négatif lui aussi.

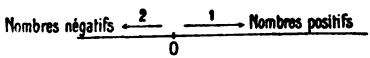


Fig. 10.

Ceci, pour ne pas nous tromper, nous oblige à considérer, dans les deux bouts d'un segment, l'un qu'on appellera son *origine*, et l'autre, son *extrémité*; et le sens du segment sera toujours celui qui part de l'origine pour aller vers l'extrémité. Quand on écrira le segment AB, cela voudra toujours dire que A est l'origine et B l'extrémité. Ceci doit nous obliger à modifier un peu, et bien aisément, notre matériel de bâtonnets. Il suffira de les noircir légèrement à l'un de leurs deux bouts, en les trempant, par exemple, dans de l'encre de Chine, teinture inoffensive; il sera convenu que le bout noir représentera toujours l'extrémité. De la sorte, en plaçant trois allumettes à la file, le bout noir vers la droite, on figurera le nombre + 3; en en plaçant deux à la file, le bout noir à gauche, on figurera le nombre — 2; et ainsi de suite.

On dira toujours qu'on ajoute un nombre à un autre en portant bout à bout, dans le sens convenable, les segments qui les figurent. Par exemple pour ajouter 11 et — 4, on prendra un segment OB de longueur 11, dirigé de gauche à droite, et à la suite, un segment BC de longueur 4, dirigé de droite à gauche. Or (fig. 8) c'est justement ce que nous

avons fait pour obtenir la différence $11 - 4$. On peut ainsi écrire $11 + (-4) = 11 - 4 = 7$; et les soustractions se ramènent à des additions.

Les exercices sur les nombres négatifs peuvent se varier autant qu'on le voudra et seront tout à fait faciles avec nos bâtonnets noircis à leur extrémité. Rien n'empêchera de former aussi des tiges longues de plusieurs bâtonnets, et de les noircir également d'un bout, afin de distinguer leur extrémité. On se familiarisera vite avec cette notion si simple, et si nécessaire, du signe ou du sens des nombres.

D'ailleurs, si les nombres négatifs surprennent quelquefois tout d'abord, il suffit de réfléchir un peu pour en trouver l'explication toute naturelle. Un nombre, dit-on, ne peut pas être plus petit que rien, c'est-à-dire que zéro. Cependant, dans le langage courant, nous disons tous les jours que le thermomètre a marqué tant de degrés au-dessous de zéro. Quand nous voulons indiquer la hauteur d'un point au-dessus du niveau de la mer, nous comprenons à merveille que si ce point est au fond de la mer, il sera au-dessous. Si, partant de chez moi, je veux compter le chemin que je ferai dans un sens déterminé, et si je marche dans le sens exactement contraire, je sais bien que je ne pourrai pas employer le même nombre pour représenter deux choses opposées. Un homme sans aucune fortune, mais qui ne doit rien, n'est pas riche ; mais si, dépourvu de fortune, il a des dettes, on peut dire qu'il a moins que rien ; sa fortune est négative. Un bouchon de liège a un certain poids ; si on le lâche dans l'air, il tombe ; plongez ce bouchon dans l'eau et lâchez-le ; il remonte ; son poids est devenu négatif, en apparence tout au moins. Bref, les nombres négatifs, loin d'avoir un caractère mystérieux, s'adaptent de la façon la plus naturelle à toutes les quantités, et il n'en manque certes pas, qui par leur essence même comportent deux modes opposés : chaud et froid, haut et bas, crédit et débit, avenir et passé, etc. Par des exemples concrets, on peut faire pénétrer ces notions simples dans la cervelle de très jeunes enfants, car

elles sont véritablement enfantines. Ils s'y intéresseront si vous ne cessez d'agrémenter vos explications de manipulations de bâtonnets et de tiges, et cela profitera plus à la formation de leur esprit que la récitation monotone de règles incomprises ou de définitions incompréhensibles.

Ils n'ont encore pratiqué, en se jouant, que les deux premières règles de l'arithmétique, addition et soustraction ; il n'y a pas longtemps qu'ils savent écrire les chiffres ou tracer quelques lettres, et les voilà déjà lancés — et vous aussi — à corps perdu, dans l'*Algèbre*. Si vous prononcez devant eux ce mot redouté, ne manquez pas de leur dire que cette science si utile et si belle est relativement moderne, et que c'est à François Viète [1] que revient la gloire d'en avoir été l'inventeur.

15. — Comptes ; mesures ; rapports.

Nous avons vu, depuis le début, que ce que nous nous proposons constamment, c'est de compter et de mesurer. Si nous avons devant nous un tas de grains de blé, et si nous trouvons, en les comptant, qu'il y en ait 157, ce nombre, comme nous l'avons fait remarquer déjà, pourra aussi bien nous servir à représenter une collection de jetons, d'allumettes, d'arbres, de moutons ou de n'importe quoi. Si pour déterminer une longueur nous avons mis des bâtonnets tous pareils les uns au bout des autres et si nous en avons trouvé 157 pour mesurer cette longueur, nous disons qu'elle est de 157 bâtonnets. Dans tous ces divers cas, nous ne pourrions rien évaluer si nous n'avions pas l'idée d'un

[1] VIÈTE, mathématicien français, né à Fontenay-le-Comte (1540-1603).

grain de blé, d'un jeton, d'un arbre, d'un mouton, d'un bâtonnet.

Le nombre n'a de raison d'être que par la comparaison qu'il amène avec l'objet unique (grain de blé, jeton, etc.) sans lequel on ne pourrait le former, et cet objet unique est appelé *unité*. Cette comparaison est ce qu'on appelle un *rapport*, et cette idée de rapport conduit à dire qu'un nombre est simplement le rapport de la collection avec l'unité.

Il est d'autant plus nécessaire de bien se mettre dans la tête cette notion-là, que l'unité n'est pas toujours la même. Ainsi, ayant formé des *paquets* de bâtonnets, prenons-en un tas et comptons-les ; nous en trouvons sept ; sept est le rapport de notre collection de bâtonnets à un paquet, qui est l'unité. Maintenant, éparpillons nos bâtonnets en défaisant les liens des paquets, et comptons ; c'est le bâtonnet qui va devenir l'unité, et nous en compterons septante ; ce nombre sera le rapport de la même collection à un bâtonnet.

De même, prenons trois fagots de bâtonnets ; si nous comptons par paquets, nous trouverons trente paquets ; et par bâtonnets, trois cents.

Trois sera le rapport de tout le tas de bâtonnets à un fagot ; trente, le rapport du même tas à un paquet ; trois cents, le rapport à un bâtonnet.

On peut produire tant qu'on en voudra des exemples semblables, en les variant à l'infini, de manière à bien familiariser l'élève avec cette notion de rapport, qui est à la base même de tout compte et de toute mesure, et qu'on rejette cependant à la fin de l'Arithmétique, dans l'enseignement classique, par on ne sait quelle aberration. Il n'est pas possible de compter deux haricots sans avoir la notion du rapport de deux à un ; de mesurer une longueur de trois mètres, sans comparer cette longueur à celle d'un seul mètre (rapport de trois à un) et ainsi de suite.

Ce sera ici l'occasion de *montrer* à l'élève, sans aucune explication théorique, sans aucune définition, sans aucun appel à sa mémoire, les objets les plus vulgaires du système

métrique que l'on aura sous la main ; mètres, litres, pièces de monnaie, poids, etc. On l'exercera à en faire usage, à s'en servir pour mesurer ou compter, et l'idée de rapport s'incrustera dans son esprit, s'y associera indissolublement avec celle de nombre, ce qui est essentiel pour une saine compréhension, le jour où, dans l'avenir, il devra passer de l'amusement à l'étude. Et cette étude alors pourra devenir elle-même intéressante et amusante, au lieu d'avoir le caractère d'une ennuyeuse corvée, pour ne pas dire d'une torture.

16. — La table de multiplication.

Nous allons maintenant apprendre à former un petit tableau, qui nous sera très utile pour ce qui va suivre, et qui constitue un bon exercice, par sa seule construction. Sous la forme où nous le représentons, ce tableau est le plus souvent appelé table de Pythagore[1] qu'il ait été ou non inventé par ce grand homme, ce dont on n'est pas trop sûr ; cela prouve en tous cas que la chose n'est pas nouvelle.

Pour former la table de multiplication, nous commençons par écrire, sur une feuille de papier quadrillé, les 9 premiers nombres dans 9 cases qui se suivent

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Puis, prenant le premier chiffre 1, nous l'ajoutons à lui-même ce qui fait 2, que nous écrivons au-dessous ; puis, nous ajoutons 1 à 2, ce qui fait 3 ; et ainsi de suite, ce qui nous donne la première colonne de la figure 11.

[1] Pythagore, philosophe grec, né à Samos, VIème siècle avant J.-C.

On s'y prendra de même pour avoir les autres colonnes ; mais ce qui est important, c'est d'arriver à écrire seulement les résultats et rien autre chose. Par exemple, pour la colonne qui commence par 7, on dira : 7 et 7, 14 ; et 7, 21 ; et 7, 28 ; et 7, 35 ; et 7, 42 ; et 7, 49 ; et 7, 56 ; et 7, 63. Et on écrira successivement 14, 21, 28,... 63 dans la colonne commençant par 7.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Fig. 11.

Il suffit, on le voit, de bien savoir sa table d'addition pour arriver très vite à former le tableau. Quand il a été complètement construit, on s'aperçoit que les lignes et les colonnes sont toutes pareilles. Ainsi, la ligne qui commence par 3 contient, comme la colonne commençant par 3, les nombres 3, 6, 9,... 27.

Il est tout à fait indispensable d'arriver à se mettre ce tableau dans la tête. Mais la vraie manière d'y arriver, c'est de ne jamais essayer de l'apprendre. On l'apprend en le construisant, en le vérifiant, en l'examinant avec soin, en en faisant usage comme nous le verrons plus loin. Si on ne l'a pas présent à l'esprit, il faut le reconstruire, ce qui n'est pas bien long ; et de la sorte on finira par le *voir*, les yeux fermés.

Il n'est pas défendu, d'ailleurs, de pousser la table plus loin que 9 ; mais si on l'amenait par exemple jusqu'à 20 ou 25, la construction prendrait beaucoup plus de temps, et il n'est pas indispensable de conserver la mémoire de la table poussée aussi loin, bien que ce ne soit pas inutile.

Quelques remarques seront faites simultanément sur certaines particularités de la table. Ainsi dans la colonne (ou la ligne) commençant par 5, les chiffres des unités sont alternativement 5 et 0 ; dans la colonne (ou la ligne) commençant par 9, les chiffres des unités 8, 7, 6,... vont toujours en diminuant de 1 et ceux des dizaines 1, 2, 3,... en augmentant de 1. Les explications ne seraient pas difficiles à trouver.

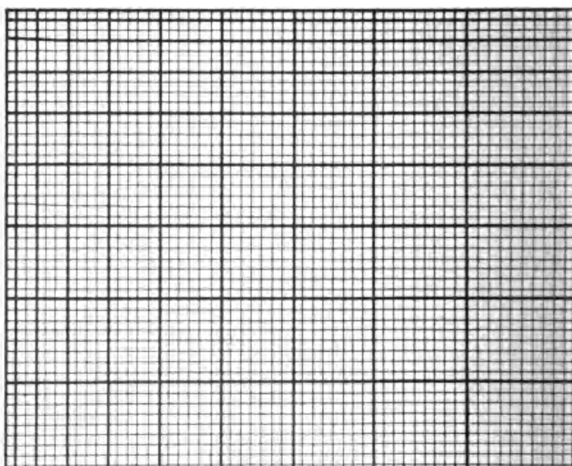


Fig. 12.

Ce qu'il y a d'assez remarquable, par exemple, c'est qu'on pourrait faire une table de multiplication sans écrire un seul chiffre ; il suffirait pour cela (fig. 12) d'avoir un papier quadrillé à cases assez petites. La table que nous donnons ici est poussée jusqu'à 10. La construction consiste à porter successivement sur une ligne horizontale 1, 2, 3,... 10 côtés d'une case, et à marquer les points de division. Puis sur une ligne verticale, en prenant le même point de départ, on fait la même chose ; en menant les lignes en traits forts par les points de division, on obtient de grandes cases ; et chacune de ces grandes cases contient un nombre de petites qui est précisément celui qui se trouvait tout à l'heure dans notre table en chiffres. La raison de cette identité est simple ; car notre table de la fig. 12 ne fait qu'exécuter graphiquement les opérations qui dans la fig. 11 résultent du calcul.

17. — Les produits.

Si je prends un tas de 7 bâtonnets, et si je forme 3 tas pareils, je peux me proposer de trouver combien cela fera de bâtonnets en tout. On appelle cela faire la *multiplication* de 7 par 3. Le résultat qu'on cherche s'appelle le *produit* de 7 par 3 ; on appelle 7, *multiplicande* ; 3, *multiplicateur ;* si au lieu de mêler tous les bâtonnets, on laissait les 3 tas séparés, on voit qu'en prenant un tas pour unité, le nombre qui représenterait le produit serait 3 ; ou que le rapport du produit à un tas serait 3 ; or le rapport de 3 à 1 c'est aussi 3.

Donc on peut dire indifféremment :

Multiplier 7 par 3, c'est répéter 7, 3 fois ; c'est trouver un nombre dont le rapport à 7 soit le même que celui de 3 à 1 ;

Multiplier un nombre (multiplicande) par un autre (multiplicateur), c'est en trouver un (produit) qui soit formé en répétant le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur; ce produit, enfin, a un rapport au multiplicande qui est pareil au rapport du multiplicateur à l'unité.

Ce ne sont pas là des formules qu'il faille faire apprendre à l'enfant; ce sont des idées dont il faut le pénétrer. Or, autant les formules sont d'apparence barbare, autant les idées sont d'une simplicité primitive, surtout quand on se donne la peine de les traduire en grains de blé, en bâtonnets ou en cases d'un papier quadrillé.

Ce qui est certain, c'est que l'enfant s'apercevra tout de suite que pour trouver le produit, il n'y a qu'à faire une addition, que le produit de 7 par 3 est $7 + 7 + 7$, de même que 3 est $1 + 1 + 1$. Et comme la table du numéro précédent a justement été faite de cette manière, elle nous donne le produit cherché 21, en prenant la colonne qui commence par 7, la ligne qui commence par 3 et cherchant la case de rencontre où on lit 21.

Ne manquons pas d'apprendre que le signe de la multiplication est $\times$, et qu'ainsi la phrase: « le produit de 7 par 3 est 21 » se traduit par $7 \times 3 = 21$.

Au lieu de 7×3 on écrit souvent 7.3; au lieu de 7 et 3, on peut avoir deux nombres quelconques représentés par a, b. Leur produit s'exprimera par $a \times b$ ou par $a.b$, ou simplement par ab; écrire par exemple $ab = p$, c'est une manière d'exprimer que le produit de a par b est p.

Il est bon de savoir aussi que l'on peut considérer des produits tels que $a \times b \times c \times d$, ou $abcd$, par exemple; cela veut dire qu'on multiplie a par b, puis le produit obtenu par c, puis le nouveau produit par d; a, b, c, d s'appellent les *facteurs* du produit $abcd$; on peut avoir ainsi des produits d'un nombre quelconque de facteurs.

Quant à la pratique de la multiplication, il faut d'abord remarquer que la table nous donne des résultats lorsque le

multiplicande et le multiplicateur sont tous deux plus petits que dix. On montrera facilement ensuite comment on multiplie un nombre par 10, 100, 1000...

L'application à des exemples nombreux, en se conformant aux règles habituelles données par tous les livres d'arithmétique, pourra être utile, à la condition de ne l'accompagner d'aucune théorie. Mais je ne saurais assez recommander, auparavant, de donner la préférence à la *méthode musulmane,* qui est presque aussi rapide, beaucoup plus facile à comprendre et à pratiquer, et pas assez connue dans l'enseignement français, bien que signalée par plusieurs auteurs.

Nous allons l'exposer (fig. 13) sur l'exemple très simple

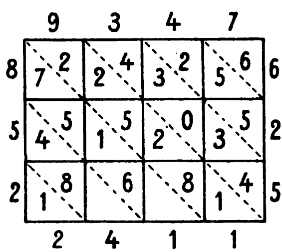
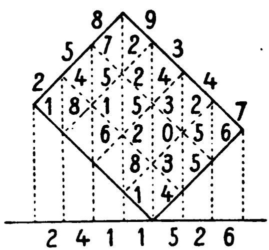


Fig. 13.

9347×258. Le multiplicande a 4 chiffres et le multiplicateur en a 3 ; prenons sur un papier quadrillé 3 lignes de 4 cases chacune ; au-dessus de cette figure, écrivons les chiffres du multiplicande 9, 3, 4, 7 *de gauche à droite ;* à gauche, et *de bas en haut,* ceux du multiplicateur 2, 5, 8 ; ayant tracé les lignes pointillées de la figure, mettons maintenant dans chaque case le produit des deux nombres correspondants, comme si nous bâtissions une table de multiplication, mais en mettant toujours le chiffre des dizaines du produit *au-dessous* et celui des unités *au-dessus* de la ligne pointillée ; enfin, faisons l'addition en prenant pour direction des colonnes celles des lignes pointillées ; on trouvera ainsi le produit

2411526. Le gros avantage de cette méthode est de n'obliger à aucune retenue dans les multiplications partielles, ni à l'observation d'aucun ordre spécial. Pourvu qu'on remplisse toutes les cases, on est sûr de n'avoir rien oublié.

Sur le même exemple et avec la même méthode, nous indiquons (fig. 14) une disposition légèrement différente, qui n'oblige pas à faire l'addition obliquement et qui en ce sens est peut-être plus commode. Elle se passe d'ailleurs de toute explication après ce que nous avons dit.



Fig, 14.

Quant à la justification de cette méthode musulmane, elle est évidente pour toute personne connaissant la théorie de la multiplication, et quant à présent inutile à l'enfant. S'il est curieux d'esprit, il la trouvera peut-être de lui-même. L'important, c'est qu'il puisse calculer correctement, *et que cela l'intéresse*. Dès que survient la fatigue ou l'ennui, il faut sans plus tarder passer à autre chose.

Nous n'abandonnerons pas cependant ce qui est relatif à la multiplication sans rappeler qu'un produit

$$a \times a \times a \times .. \times a$$

dont tous les facteurs sont égaux s'appelle une *puissance* de a ; qu'un tel produit s'écrit a^n, n étant le nombre des facteurs, et qu'on le nomme la $n^{ème}$ puissance de a ; que la 2ème puissance est appelée *carré* et la 3ème, *cube* : (on verra bientôt pourquoi). Le nombre n est appelé *exposant*.

Par exemple, la 4ème puissance de 2 est :

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16 \text{; l'exposant est 4.}$$

Le cube de 5 est :

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125 \text{; l'exposant est 3.}$$

Le carré de 7 est :

$$7 \times 7 = 7^2 = 49 \text{; l'exposant est 2.}$$

18. — Opérations curieuses.

Il y a un certain nombre de résultats d'opérations qui frappent l'esprit par des particularités attirant l'attention. Leur grand mérite est par cela même de donner le goût du calcul, en piquant la curiosité.

Je vais en donner seulement quelques exemples, suffisants pour le but poursuivi.

I. Dites à un enfant, après lui avoir remis une enveloppe cachetée, d'écrire un nombre de 3 chiffres à sa fantaisie ; soit 713 ; de le retourner bout pour bout, ce qui donne 317 ; de faire la différence, 396 [1] ; de retourner ce résultat bout pour bout, 693 ; enfin de faire la somme de ces deux derniers nombres, 1089. Là-dessus, priez-le d'ouvrir l'enveloppe ; il y trouve un papier sur lequel vous avez écrit par avance 1089. Et vous avez pu l'écrire avec d'autant plus de sûreté que tout autre nombre que 713 aurait conduit au même résultat, pourvu que les deux chiffres extrêmes soient différents.

II. — Si l'on fait les opérations $12 \times 9 + 3$, $123 \times 9 + 4$, et ainsi de suite, jusqu'à $123456789 \times 9 + 10$, les résultats s'obtiendront en n'écrivant rien que des chiffres 1.

Au contraire $9 \times 9 + 7$, $98 \times 9 + 6$,... $9876543 \times 9 + 1$, donneront des nombres qui s'écriront rien qu'avec des chiffres 8.

[1] Cette différence doit toujours avoir trois chiffres. Si l'on n'en avait que deux, il faudrait écrire un zéro à la place des centaines. Par exemple, 716 et 617 donnent pour différence 099 ; et en ajoutant 099 et 990, on trouve bien 1089.

III. — Le produit 12345679 × 9 s'écrit uniquement avec des 1. En prenant le même multiplicande 12345679 et les multiplicateurs 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, on aura encore des produits curieux, s'écrivant tous avec le même chiffre répété.

IV. — Considérons le nombre 142857 ; si on le multiplie successivement par 2, 3, 4, 5, 6, on aura :

285714, 428571, 571428, 714285, 857142,

et ces nombres s'écrivent avec les mêmes chiffres que le nombre donné.

Si on le multiplie par 7, on trouve 999999.

Si on le coupe en deux par le milieu, on a 142 et 857 : et la somme de ces deux nombres est 999. On a le même résultat en partant d'un quelconque des cinq produits écrits plus haut, et en le coupant en deux.

V. — Complétons ceci par une indication sur les multiplications par 9, par 99, par 999, qu'on devra toujours faire en multipliant d'abord par 10, 100, 1000, etc., puis en retranchant le multiplicande. Si celui-ci n'est pas trop gros, on arrivera même à pouvoir assez rapidement faire mentalement ces multiplications.

19. — Les nombres premiers.

En parcourant des yeux une table de multiplication, on s'aperçoit qu'elle renferme certains nombres jusqu'à la limite qu'elle comporte, mais non pas tous ces nombres. Autrement dit, il y a des nombres qui sont des produits, et d'autres qui ne le sont pas ; ceux-ci sont appelés des nombres *premiers* ; les autres sont appelés des nombres *composés*.

Par exemple, 2, 3, 5, 7, 29, 71 sont des nombres premiers ; 4, 6, 9, 87, 91 sont des nombres composés, car

$4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$, $9 = 3 \times 3$, $87 = 3 \times 29$, $91 = 7 \times 13$.

Si loin qu'on avance dans la suite des nombres, on rencontre toujours des nombres premiers, et des nombres composés. Cette distinction est capitale ; et cependant, malgré les travaux des plus grands savants, on ne sait que fort peu de chose sur les nombres premiers. C'est à ce point qu'on est incapable, lorsqu'un nombre est un peu considérable, de dire s'il est premier ou non, à moins de se livrer à un tâtonnement qui peut exiger des calculs extrêmement longs et pénibles. Cela montre combien la science est peu avancée sur ces questions qui paraissent simples, et combien il convient d'être modeste, lorsque nous comparons le peu d'étendue de nos connaissances à l'immensité des choses que nous ignorons.

Toutefois, dès l'antiquité, on a connu un moyen de former les nombres premiers jusqu'à une limite aussi lointaine qu'on le voudra. Ce moyen consiste à écrire la liste tout entière de ces nombres, puis à biffer ceux qui sont des produits par 2, par 3, par 5, etc. Nous allons l'appliquer ici aux 150 premiers nombres. Ecrivons-les, en supprimant 1 qui nous est inutile :

2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13
~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~
~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37
~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~
~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~	61
~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~	73
~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~
~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97
~~98~~	~~99~~	~~100~~	101	~~102~~	103	~~104~~	~~105~~	~~106~~	107	~~108~~	109
~~110~~	~~111~~	~~112~~	113	~~114~~	~~115~~	~~116~~	~~117~~	~~118~~	~~119~~	~~120~~	~~121~~
~~122~~	~~123~~	~~124~~	~~125~~	~~126~~	127	~~128~~	~~129~~	~~130~~	131	~~132~~	~~133~~
~~134~~	~~135~~	~~136~~	137	~~138~~	139	~~140~~	~~141~~	~~142~~	~~143~~	~~144~~	~~145~~
~~146~~	~~147~~	~~148~~	149	~~150~~							

Partant de 2, si nous marchons de 2 en 2 en suivant la liste, nous rencontrons les produits par 2, qui sont 4, 6,.... c'est-à-dire les nombres pairs ; ils ne sont donc pas premiers, et nous les biffons d'un trait jusqu'à 150.

Partons de 3, marchons de 3 en 3, et biffons de même les nombres que nous rencontrons, et qui sont des produits par 3, si ce n'est fait déjà.

Le premier nombre non biffé après 3, c'est 5 ; partant de 5, et marchant de 5 en 5, nous allons procéder de la même manière. Si nous faisons la même chose, pour 7, pour 11... nous trouvons qu'en conservant seulement les nombres non biffés, il reste :

2 3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	
101	103	107	109	113	127	131	137	139	149			

C'est la liste des nombres premiers juqu'à 150.

Ce procédé si ingénieux est connu sous la désignation de *crible d'Eratosthène*[1] du nom de l'inventeur.

20. — Les quotients.

Des tas de jetons, contenant 7 jetons chacun, ont été réunis en un seul tas qui en contient 56. On voudrait savoir combien il a fallu de petits tas pour former le gros.

L'opération qu'il faut faire pour le savoir s'appelle une *division*. On peut dire aussi qu'elle a pour but, connaissant

[1] ERATOSTHÈNE, savant alexandrin, né à Cyrène (276-193 avant J.-C.)

un produit de deux facteurs, 56, et l'un des facteurs, 7, de trouver l'autre.

Le produit donné 56 s'appelle *dividende;* le facteur donné 7 s'appelle *diviseur,* et le résultat qu'on cherche s'appelle le *quotient.*

On pourrait trouver le quotient en faisant des soustractions, c'est-à-dire en enlevant le diviseur du dividende, puis le diviseur du reste obtenu, et ainsi de suite, et en comptant combien de fois on peut l'enlever ainsi, de manière à ce qu'il ne reste plus rien. Ainsi, en enlevant successivement 7 de 56, il reste 49, 42, 35, 28, 21, 14, 7, et on voit que cela fait 8 opérations de soustractions pour épuiser tout le dividende 56. Le quotient cherché est donc 8, ce que d'ailleurs la connaissance de la table de multiplication pourrait nous montrer tout de suite.

Le procédé des soustractions successives serait impraticable avec des nombres un peu forts, à cause de sa longueur. La règle classique qu'on adopte pour faire une division n'est pas autre chose qu'un moyen de compter avec une rapidité beaucoup plus grande les soustractions qu'on effectue en bloc.

Pour habituer facilement les enfants à la pratique de la division, il faut commencer par leur faire invariablement former, en un petit tableau, les produits du diviseur par 2, 3... 9. Cela fait disparaître, dans toute la suite de l'opération, les hésitations si embarrassantes pour les commençants.

Nous indiquerons cette pratique de l'opération sur l'exemple de la division de 643734 par 273. Les produits de 273 sont :

1 × 273 =	273	6 × 273 =	1638
2	546	7	1911
3	819	8	2184
4	1092	9	2457
5	1365		

Disposons alors l'opération de la manière ordinaire

```
643734 | 273
       |-----
546      2358
---
 977
 819
 ----
 1583
 1365
 ----
  2184
  2184
  ----
     0
```

Au dividende il y a 643 mille ; comme notre petite table nous montre que 643 contient 2 fois le diviseur, en enlevant du dividende 546 mille, nous faisons 2 mille soustractions d'un seul coup. Il reste 97734, contenant 977 centaines : 977 contient 3 fois le diviseur, et en enlevant 819 centaines, nous avons fait encore 300 soustractions d'un coup. Il reste 15834, contenant 1583 dizaines ; 1583 contient 5 fois le diviseur, et en enlevant 1365 dizaines, nous faisons encore 50 soustractions. Enfin il reste 2184, qui est juste 8 fois le diviseur. Donc en faisant 8 soustractions de plus nous aurons tout enlevé du dividende ; et le quotient sera 2358, nombre total de nos soustractions.

L'enfant devra prendre l'habitude de faire ainsi des divisions sans même qu'il soit nécessaire de lui donner avec trop de détails les explications qui précèdent.

La division ci-dessus a pu se faire parce qu'on avait choisi exprès le dividende et le diviseur ; mais si on prend au hasard deux nombres, il y a bien peu de chances pour que la division soit possible. On ne pourra plus enlever exactement du dividende un certain nombre de fois le divi-

seur, de manière à ce qu'il ne reste plus rien. Seulement, si on procède comme tout à l'heure, on enlèvera le diviseur du dividende *autant qu'on le pourra,* et ce qui restera du dividende sera alors un nombre plus petit que le diviseur. C'est là ce qu'on appelle *reste* de la division impossible.

Comme exemple très simple, supposons qu'on veuille diviser 220 par 12. On reconnaîtra que c'est impossible ; et quand on aura enlevé 18 fois 12 de 220, il restera 4 ; il s'ensuit que 220—4 ou 216 serait divisible par 12, et le quotient serait 18. On voit donc que les divisions impossibles, qui donnent un reste, permettent d'avoir immédiatement des divisions possibles, en remplaçant simplement le dividende par ce dividende diminué du reste.

Ne vous attachez du reste à cette opération de la division qu'au point de vue de la pratique du calcul. Les théories sont intéressantes, mais viendront plus tard utilement. Elles n'auraient guère place dans la période d'initiation.

Il est bon d'apprendre que la division s'indique par un signe (: ou —). Ainsi 56 : 7 ou $\frac{56}{7}$ exprime le quotient de 56 par 7. On peut ainsi écrire $56 : 7 = \frac{56}{7} = 8$. En général $\frac{a}{b} = q$ veut dire que le quotient de la division de a par b est le nombre q.

21. — Le gâteau partagé ; les fractions.

Supposons que cinq personnes se proposent de se partager également un gâteau rond. On le coupera en cinq morceaux bien égaux (fig. 15) par des traits partant du milieu ;

et chacun de ces morceaux, comme AOB, sera **la part** de chaque personne. Cette part est appelée un **cinquième** de gâteau; et on représentera AOB par $\frac{1}{5}$ de gâteau.

Sur les cinq personnes, deux se trouvent absentes; mais on veut leur réserver leur part. On mettra alors de côté les morceaux AOB, BOC par exemple, exactement pareils. Ces deux morceaux pris ensemble se nommeront deux cinquièmes de gâteau et on les représentera par $\frac{2}{5}$. Tous ces nombres, tels que $\frac{2}{5}$, s'appellent des *fractions ;* **2** et **5** sont les deux *termes;* **2**, qui s'écrit au-dessus de la barre, est le ***numérateur;*** il indique le nombre des morceaux; 5, au-dessous de la barre, est le *dénominateur ;* il indique en combien de morceaux on a partagé le gâteau tout entier.

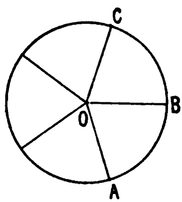


Fig. 15.

Si on avait pris $\frac{5}{5}$ du gâteau, on voit bien que cela aurait fait le gâteau tout entier; et si on avait divisé le gâteau en un nombre quelconque de parts égales, pour prendre ensuite ce même nombre de parts, on reformerait également le gâteau, de sorte que la fraction $\frac{a}{a}$ dont le numérateur et le dénominateur sont pareils est toujours égale à **1**.

Dans le cas où dix personnes, et non pas cinq seulement, auraient eu à se partager le gâteau, il aurait fallu le diviser en dix parts égales, des dixièmes, qu'on pourrait aussi bien obtenir en prenant les cinquièmes, tels que AOB et en les coupant chacun en deux parties égales. Donc $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; et il n'est pas plus difficile de constater qu'en général deux fractions sont égales si on peut passer de l'une à l'autre en

multipliant les deux termes par un même nombre. Ce principe fondamental de toute la théorie des fractions se constate ainsi, avec un caractère d'évidence intuitive, sur des objets concrets, et il n'en faut pas demander de démonstration.

Supposons maintenant qu'il y ait 17 gâteaux, tous pareils, et que 5 personnes veuillent se les partager également. Il y a deux moyens. L'un, c'est de partager chacun des gâteaux en cinquièmes, et chaque personne prendra un cinquième de chacun des gâteaux, ou en tout $\frac{17}{5}$. Le second moyen est de partager entre tous, autant qu'on le peut, les 17 gâteaux ; il suffit de tenter la division, qui est possible pour 15, chaque personne prenant 3 gâteaux. Il ne reste donc plus que deux gâteaux à partager. En les divisant en cinquièmes, chacun devra prendre $\frac{2}{5}$; et cela nous montre que $\frac{17}{5} = 3 + \frac{2}{5}$

Il est facile, dans cette voie, d'initier l'enfant à tout le calcul ordinaire des fractions, sur lequel il nous paraît inutile d'insister ici. Mais on n'y parviendra qu'en usant toujours d'objets concrets, gâteaux, pommes, oranges, longueurs divisées, etc. Il saisira à merveille, alors, que ces nouvelles expressions arithmétiques sont des nombres et qu'elles expriment des rapports.

Mais ce que vous devrez dire, surtout, et ce qu'on ne dit à peu près jamais, c'est que ces nombres ne peuvent s'appliquer qu'à des quantités qui soient divisibles par leur nature même, comme celles que nous avons indiquées ; si, par exemple, une question comportait la considération d'un certain nombre de personnes, l'application de nombres fractionnaires serait une absurdité, et, dans son résultat, montrerait l'impossibilité.

En d'autres termes, le calcul s'applique aux choses qui

s'y prêtent, et elles sont nombreuses ; mais il ne s'applique pas à tout. Et, maxime non moins importante, qui complète celle-ci : il faut toujours réfléchir et avoir recours à son bon sens, avant de calculer.

Par exemple, voici un problème, signalé notamment par Edouard Lucas [1], et qui peut servir d'exercice utile dans cet ordre d'idées : Un tailleur a une pièce d'étoffe de 16 mètres ; il en coupe deux mètres chaque jour ; au bout de combien de jours aura-t-il coupé toute la pièce ? — L'étourderie, jointe à l'automatisme du calcul, conduit à répondre 8, au lieu de 7 qui est le résultat qu'indique le bons sens.

Les opérations sur les fractions devront être variées, pas trop compliquées comme calcul, empruntées le plus possible à des questions concrètes effectives. Il sera bon de les compléter en attirant l'attention sur les *fractions décimales*, sur la manière dont on peut les écrire, et sur la pratique du calcul qui s'y rapporte.

Beaucoup de bons traités d'arithmétique pourront fournir à cet égard les indications nécessaires. Je me borne à insister sur l'utilité de se servir surtout des mesures de longueur et d'exemples empruntés au compte des monnaies.

Enfin il est bon d'observer que si le signe de la division et la notation des fractions sont les mêmes, ce n'est pas fortuitement, et que cela ne saurait faire confusion ; $\frac{15}{3}$ par exemple, exprime aussi bien le quotient de la division de 15 par 3, que la fraction $\frac{15}{3}$. Cela se voit sur les objets concrets, et il n'y a qu'à le constater.

[1] Ed. Lucas, mathématicien français, né à Amiens (1842-1891). Ce fut peut-être l'homme de son époque connaissant le mieux la science des nombres. Il a été profondément méconnu ; le chagrin et les déceptions ont contribué à sa fin prématurée.

Les propriétés et le calcul des fractions peuvent être aussi exposés, d'une façon très heureuse, en faisant usage du papier quadrillé.

On en jugera par les remarques qui vont suivre ; elles ne se sont présentées à mon esprit que depuis la publication de la deuxième édition. Je m'efforcerai de les indiquer ici, aussi brièvement que possible, mais en développant toutefois ma pensée de manière à l'exprimer avec une clarté suffisante. Je m'adresse aux éducateurs, et pourvu qu'ils m'aient bien compris, ils n'auront pas de peine à mettre en application les moyens proposés, sous la forme qui leur semblera la meilleure, s'ils partagent en principe ma manière de voir.

Représentons une unité concrète quelconque (pourvu que

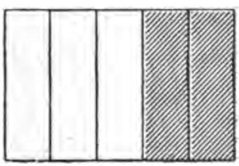


Fig. 16.

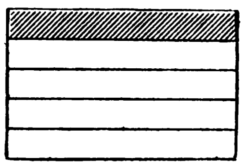


Fig. 17.

par sa nature elle soit divisible) au moyen d'un rectangle (fig. 16, 17).

Si on divise la longueur de ce rectangle en 5 parties égales, on peut le découper en 5 parties, en 5 bandes verticales pareilles. Chacune d'elles est *un cinquième* de l'unité (fig. 16).

Si on divise sa hauteur en 5 parties égales, on peut aussi le découper en 5 bandes horizontales pareilles, et chacune d'elles est aussi *un cinquième* de l'unité (fig. 17).

Si on divise sa longueur (fig. 18) en 3 parties égales, et la hauteur en 4 parties égales, l'unité pourra être découpée, par des traits passant par les points de division, en 12, ou 3×4 petits rectangles, tous pareils, et chacun d'eux sera *un douzième* de l'unité.

En prenant un nombre quelconque de ces bandes ou de ces rectangles, on a ce qu'on appelle *une fraction*. Si le nombre des bandes ou des petits rectangles est moindre que

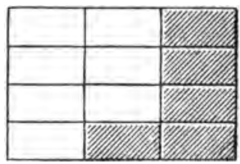


Fig. 18.

celui qui compose l'unité, on a une *fraction proprement dite*. S'il est plus grand, on a une *expression fractionnaire*. On voit qu'une fraction proprement dite est plus petite que 1, et qu'une expression fractionnaire est plus grande que 1. Si on prenait justement le même nombre de bandes ou de rectangles qu'il y en avait dans l'unité, on recomposerait cette unité ; une telle fraction par conséquent est égale à 1.

Quand nous dirons « fraction », cela voudra dire, d'une façon générale, une fraction proprement dite.

En mettant des hachures sur les bandes ou les rectangles qu'on ne garde pas, on peut représenter, au moyen de la partie restée blanche, une fraction quelconque. Ainsi (fig. 16), nous voyons la fraction trois cinquièmes ; dans la fig. 17, quatre cinquièmes ; dans la fig. 18, sept douzièmes.

Le nombre des rectangles blancs (3, 4, 7 dans ces trois exemples) est appelé *numérateur;* celui des rectangles dont est formée l'unité (5, 5, 12) est appelé *dénominateur ;* et les trois fractions s'écrivent $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{12}$.

Si on voulait représenter une expression fractionnaire, on n'aurait plus de hachures, et la figure serait plus grande que l'unité, le numérateur serait plus grand que le dénominateur. Si le numérateur est égal au dénominateur, on a l'unité elle-même.

Principe fondamental. — On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant le numérateur et le dénominateur par un même nombre.

Soit la fraction $\frac{3}{4}$ (fig, 19). Je veux démontrer qu'elle est égale à $\frac{15}{20}$ ou $\frac{3 \times 5}{4 \times 5}$. La fraction $\frac{3}{4}$ était représentée par des bandes verticales. Je divise la hauteur en 5 parties égales, et j'imagine le rectangle unité découpé par des traits horizontaux passant par les points de division. Il se trouve ainsi divisé en petits rectangles pareils ; et il y en a 4×5 ou 20 ; regardons maintenant la fraction $\frac{3}{4}$; elle comprend 3×5 ou 15 petits rectangles ; elle n'a pas changé ; son dénominateur et son numérateur ont été multipliés par 5 l'un et l'autre ; ainsi $\frac{3}{4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$.

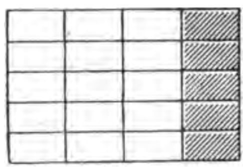


Fig. 19.

On peut réduire graphiquement deux fractions au même dénominateur, soit en invoquant le principe précédent, soit directement sur les figures.

Prenons par exemple $\frac{1}{4}$ et $\frac{2}{3}$, fractions représentées, la première par une bande verticale et l'autre par deux bandes horizontales (fig. 20).

Divisant le premier rectangle en trois bandes horizontales

pareilles, le second en quatre bandes verticales, nous voyons que nos deux fractions se lisent $\frac{3}{12}$ et $\frac{8}{12}$.

L'addition et la soustraction seront facilement exposées ensuite, en s'inspirant de ces représentations concrètes.

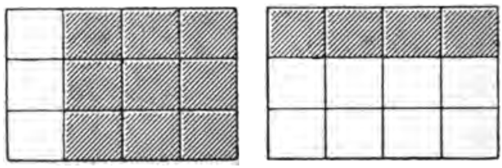


Fig. 20.

Pour la multiplication, la définition même nous dit que multiplier $\frac{2}{5}$ par $\frac{3}{4}$, c'est prendre les $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$.

Prenons (fig. 21) la fraction $\frac{2}{5}$ représentée en ABCD par deux bandes verticales. Divisant la hauteur AD en quatre parties égales et menant des traits horizontaux, nous avons divisé $\frac{2}{5}$ en 4 parties égales ; prenons-en trois, et couvrons le reste de hachures horizontales. La partie blanche est le produit ($\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$) ; elle comprend 2×3 ou 6 petits rectangles ; l'unité en comprend 5×4 ou 20. Donc

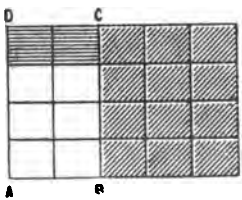


Fig. 21.

$$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{6}{20}.$$

Il est facile, par de pareils procédés, de préciser dans l'esprit de l'enfant l'idée de *rapport* (le rapport de a à b étant le nombre qui mesure a quand on prend b pour unité), de montrer l'identité de ce rapport avec la fraction $\frac{a}{b}$, d'établir que $\frac{a+m}{b+m}$ se rapproche indéfiniment de 1 quand on donne à m des valeurs entières de plus en plus grandes, de faire voir qu'une fraction est le quotient du numérateur par le dénominateur, de mettre en lumière les propriétés fondamentales des proportions, etc.

Soit avec du papier quadrillé, soit avec de petits rectangles (ou carrés) en bois, blancs sur une face, noirs sur la face opposée, toutes ces opérations peuvent être matériellement exécutées. Elles ont un caractère à la fois instructif et amusant, elles attirent l'attention de l'enfant, fixent dans son esprit des vérités importantes sans qu'il ait à faire des efforts de mémoire; ces vérités, il les *voit,* il les compose pour ainsi dire de ses mains; ce ne sont plus pour lui des phrases obscures répétées sans y attacher un sens précis, mais des réalités tangibles.

L'expérience montre que ces méthodes sont d'une pratique pédagogique efficace; il est à désirer qu'elles se répandent de plus en plus.

22. — Nous devenons géomètres.

On a déjà vu ce que c'est qu'une ligne droite. C'est la plus simple de toutes les figures de la Géométrie. Nous pouvons chercher à étendre un peu nos connaissances dans cette voie. Nous commencerons, par exemple, par avoir l'idée

d'un *plan* en regardant la surface d'une eau bien tranquille, celle d'une glace bien dressée, d'un plafond, d'un parquet, d'une porte. Une ardoise, une feuille de papier étendue sur une planchette bien rabotée, nous donnent aussi l'idée d'un plan, et nous sentons que, comme la ligne droite, le plan peut être, par la pensée, prolongé autant qu'on voudra, indéfiniment. Sur un plan on peut appliquer dans tous les sens une règle bien dressée. Sur une feuille de papier on peut tracer des lignes droites tant qu'on voudra.

Si on en trace deux seulement, elles peuvent (fig. 22)

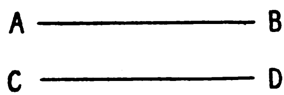


Fig. 22.

être *parallèles,* comme AB, CD. Sur un papier réglé, on s'aperçoit qu'il y a des lignes qui sont toutes parallèles, et que deux lignes parallèles ne se rencontrent jamais.

Si au contraire (fig. 23) deux droites AB, CD se rencontrent en un point O, les figures AOC, COB, BOD, DOA sont des *angles*. Deux angles sont égaux quand on peut les appliquer l'un sur l'autre. Les angles AOC, BOD, par exemple, sont égaux ; il en est de même de COB, DOA.

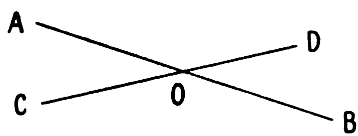


Fig. 23.

Quand deux droites (fig. 24) se coupent de telle façon que les angles DOA, AOC sont égaux, les quatre angles autour de O sont égaux aussi ; on les appelle alors des *angles droits ;* et la figure formée par les deux lignes est celle d'une croix. Sur un papier quadrillé, on voit des angles droits partout où deux lignes se rencontrent. Lorsque deux droites forment ainsi des angles droits, on dit qu'elles sont *perpendiculaires* l'une sur l'autre.

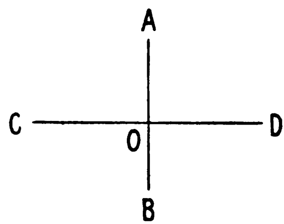


Fig. 24.

Un angle plus petit qu'un angle droit, comme AOC, dans la figure 23, s'appelle un angle *aigu ;* s'il est plus grand, comme COB, c'est un angle *obtus*.

Un fil à plomb représente une droite qu'on appelle *verticale*. Une droite perpendiculaire à une verticale est appelée *horizontale*. Toutes les droites qui seraient appliquées sur la surface d'une eau tranquille seraient des droites horizontales, et cette surface est elle-même un plan, qu'on nomme aussi *horizontal*. Sur un papier quadrillé posé devant nous, les lignes qui vont de gauche à droite sont appelées horizontales, et les autres verticales, parce qu'on suppose le papier redressé et appliqué par exemple sur un mur.

Soit maintenant que sur une feuille de papier on ait tracé trois lignes droites. Plusieurs cas peuvent se présenter. Les trois droites (fig. 25) peuvent être parallèles.

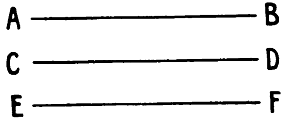


Fig. 25.

En second lieu (fig. 26), deux, AB, CD, peuvent être parallèles, et la troisième EF les couper en E, F. On appelle alors cette troisième droite une *sécante*. Dans cette figure, tous les angles marqués (1) sont égaux entre eux, les angles marqués (2) aussi ; et la somme d'un angle (1) et d'un angle (2) est égale à deux angles droits.

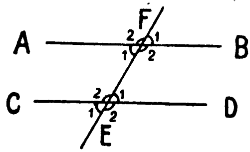


Fig. 26.

Il peut arriver (fig. 27) que nos trois droites passent par un même point O ; on dit alors qu'elles sont *concourantes*.

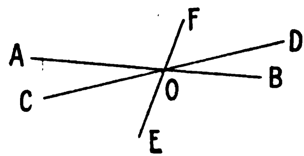


Fig. 27.

Enfin (fig, 28) si aucune des circonstances précédentes ne se produit, les trois droites se couperont deux à deux en trois

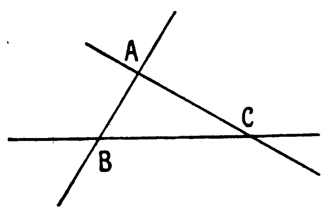


Fig. 28.

points A, B, C, et limiteront une portion du plan ABC, qu'on peut considérer à part (fig. 29) et qui s'appelle un *triangle*. Les points A, B, C s'appellent les *sommets*, et les

segments AB, BC, CA, les *côtés* du triangle. On dit que les angles A, B, C, marqués sur la figure sont les *angles* du triangle.

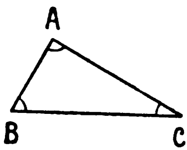


Fig. 29.

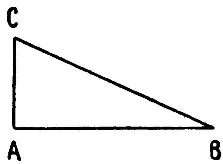


Fig. 30.

Un des angles du triangle, A (fig. 30) peut être droit ; on dit alors que le triangle est *rectangle*. Il peut se faire

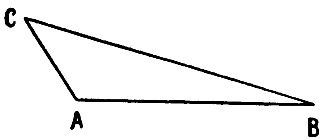


Fig. 31.

aussi (fig. 31) qu'il y ait un angle obtus ; on dit alors que le triangle est *obtusangle*.

Si un triangle, comme ceux de la figure 32, a deux côtés

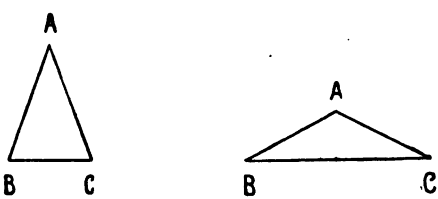


Fig. 32.

égaux AB, AC, le triangle est appelé *isoscèle*. Les angles B et C sont alors égaux.

Si un triangle (fig. 33) a ses trois côtés égaux, il est *équilatéral*. Ses trois angles sont alors égaux.

Dans un triangle ABC (fig. 34) on peut choisir un côté quelconque BC, et l'appeler *base*. Si on trace alors par le

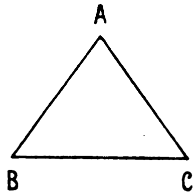


Fig. 33.

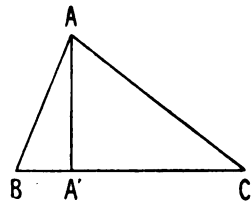


Fig. 34.

point A une droite perpendiculaire à BC et qui rencontre BC en A′, on dit que AA′ est la *hauteur* du triangle.

Cette simple figure, le triangle, a d'innombrables propriétés ; on en étudiera quelques-unes plus tard ; pour l'instant, il ne faut pas se faire d'illusions, nous n'étudions rien du tout ; nous apprenons simplement à voir les figures et à savoir comment on les nomme. C'est déjà quelque chose.

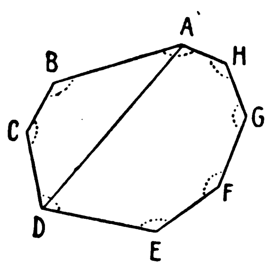


Fig. 35.

Quand une partie d'un plan (fig. 35) est limitée par plusieurs droites, ou plutôt par plusieurs segments de droites, cette figure s'appelle un *polygone*. Les segments AB, BC,... HA sont les *côtés*, les points A, B,... H les *sommets*, les angles marqués A, B,... H, les *angles* du polygone.

Un polygone comme celui de la figure 36 est dit à *angles rentrants*. Quand il n'y a pas d'angle rentrant, comme dans

la figure 35, le polygone est *convexe*. En général, nous ne parlerons que de polygones convexes.

Une droite comme AD (fig. 35) qui joint deux sommets d'un polygone, et qui n'est pas un côté, s'appelle une *diagonale*.

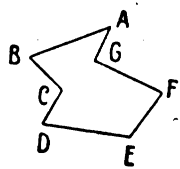


Fig. 36.

Dans un polygone, le nombre des sommets, celui des côtés, et celui des angles sont les mêmes. On a donné des noms particuliers à quelques polygones, d'après ce nombre de côtés. D'abord, comme nous l'avons dit, un polygone de trois côtés est un triangle. Puis

Un	polygone	de	4	côtés	est	un	*quadrilatère*
»	»	»	5	»	»	»	*pentagone*
»	»	»	6	»	»	»	*hexagone*
»	»	»	7	»	»	»	*heptagone*
»	»	»	8	»	»	»	*octogone*
»	»	»	10	»	»	»	*décagone*
»	»	»	12	»	»	»	*dodécagone*

Ainsi, la figure 35 représente un octogone convexe, et la figure 36 un heptagone à angles rentrants.

Dans un quadrilatère, deux côtés AB, CD peuvent être

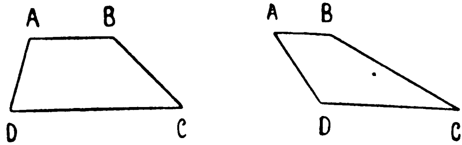


Fig. 37.

parallèles (fig. 37) les deux autres ne l'étant pas : de tels quadrilatères s'appellent *trapèzes*. Les côtés AB, CD sont les *bases* du trapèze.

Si (fig. 38) les côtés AB, CD sont parallèles, et si les côtés BC, DA le sont aussi, le quadrilatère est un *parallélogramme*. Alors les côtés AB et CD sont égaux, et il en est de même pour BC et AD. En outre, les angles A, C sont égaux ; et de même pour B, D.

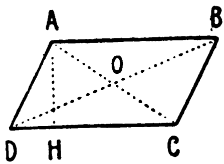


Fig. 38.

Si dans un parallélogramme les quatre côtés sont égaux (fig. 39) c'est un *losange*.

Si (fig. 40) un des angles est droit, les trois autres le sont aussi, et le parallélogramme est un *rectangle*.

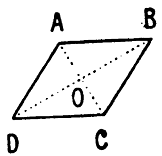


Fig. 39.

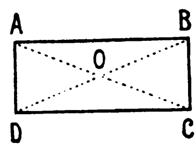


Fig. 40.

Si enfin (fig. 41) un rectangle a ses côtés égaux, on le nomme un *carré*.

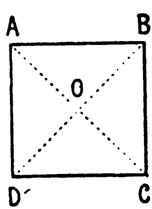


Fig. 41.

Dans tout quadrilatère, il y a deux diagonales ; dans tout parallélogramme (fig. 38, 39, 40, 41) ces deux diagonales AC, BD se coupent en un point O qui est le milieu de chacune d'elles. Dans un losange (fig. 39) les deux diagonales sont perpendiculaires entre elles. Dans un rectangle (fig. 40) les deux diagonales sont égales. Dans un carré (fig. 41) les deux diagonales sont à la fois égales et perpendiculaires. On remarquera qu'un carré est à la fois un losange et un rectangle.

Si dans un parallélogramme (fig. 38) on prend un côté CD qu'on appelle *base*, et si on a une droite AH perpendiculaire sur CD, elle l'est aussi sur AB; cette droite, ou plutôt ce segment AH, s'appelle *hauteur* du parallélogramme.

Sur un papier quadrillé, en suivant les lignes du quadrillage, on peut former autant qu'on en veut des rectangles et des carrés.

Il faut s'exercer aussi à construire avec un crayon, une règle, une équerre et un double décimètre pour mesurer les

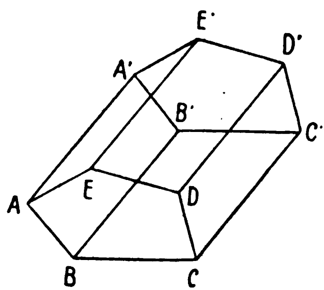


Fig. 42.

longueurs, les diverses figures dont nous avons parlé, et d'autres qu'on peut imaginer, avec tout le soin possible. Il faut s'habituer à les dessiner convenablement à main levée, sans le secours d'aucun instrument. Un bon exercice consistera, après avoir fait avec soin une figure au crayon, avec les instruments, à la mettre ensuite à l'encre à main levée.

Nous ne disons rien encore de l'emploi du compas et du rapporteur, nous réservant de l'indiquer sommairement plus tard.

Ne perdons pas de vue, d'ailleurs, que le dessin n'a jamais dû être abandonné, depuis que nous avons commencé à tracer nos premiers bâtons.

Lorsque (fig. 42) nous avons un polygone ABCDE, dans un plan horizontal par exemple, si nous menons des

droites AA′, BB′, CC′, DD′, EE′, toutes parallèles et égales entre elles, en dehors du plan, les extrémités A′, B′, C′. D′, E′, sont les sommets d'un autre polygone pareil au premier. Les quadrilatères AA′ BB′, etc., sont alors des parallélogrammes; le corps qui serait limité par tous ces parallélogrammes et par les deux polygones s'appelle un *prisme;* les deux polygones sont les *bases;* les parallélogrammes sont des *faces;* la distance entre les plans des deux bases s'appelle la *hauteur*. Les droites AA′ BB′,... sont les *arêtes.*

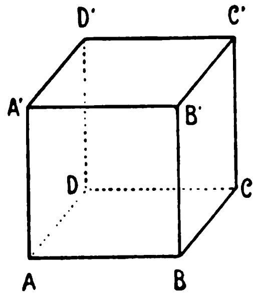


Fig. 43.

Si les arêtes sont verticales (en supposant les bases horizontales), le prisme est *droit.*

Si les bases sont des parallélogrammes, le prisme s'appelle un *parallélépipède.*

Si, enfin, la base est un carré, et si le parallélépipède étant droit a pour hauteur le côté de la base. le parallélépipède a alors la forme d'un dé à jouer et il s'appelle un *cube* (fig. 43).

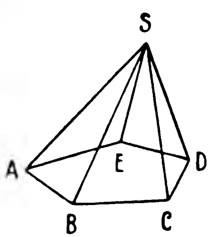


Fig. 44.

Lorsque (fig. 44) nous avons un polygone ABCDE, si nous joignons tous les sommets à un point S en dehors du plan, le corps qui serait limité par le polygone et les triangles SAB, SBC,... SEA s'appelle une *pyramide;* ABCDE est la *base,* les triangles SAB,... sont les *faces*; SA. SB,... sont les *arêtes;* S est le *sommet;* la distance du sommet au plan de la base, qui serait verticale si la base était horizontale, est la *hauteur* de la pyramide.

Avec de petites baguettes en bois et quelques brins de fil métallique, il est aisé d'arriver à construire de petits modèles donnant une idée suffisamment précise des figures dont nous venons de parler. On pourra également les tailler avec un couteau, dans une carotte ou une pomme de terre.

On notera que les figures 42 et 44, en perspective, sont faites en supposant toutes les arêtes visibles (figures en baguettes) tandis que le cube de la figure 43 représente en pointillé trois arêtes cachées, AD, DC, DD', ce qui a lieu si le cube est un corps plein, en une matière opaque.

23. — Les aires.

Le mot « Géométrie » signifie par son étymologie : mesure de la Terre. Cela ne répond guère à la science géométrique telle que nous la connaissons aujourd'hui, mais cela nous éclaire sur les origines de cette science, qui est née, comme les autres, des besoins de l'humanité. De bonne heure, on a reconnu la nécessité d'évaluer l'étendue des terrains, et on a cherché les moyens d'y arriver. Ces terrains ayant dans leur ensemble une forme à peu près plane, et étant le plus souvent limités par des lignes droites, c'est donc l'étendue des divers polygones décrits dans le n° précédent qu'il s'agit de déterminer, de mesurer, pour connaître cette étendue.

Mais pour mesurer n'importe quoi, il faut une unité. Nous savons mesurer des longueurs, en prenant pour unité un mètre, ou une allumette, ou un côté d'une case d'un papier quadrillé, peu importe. Pour mesurer une longueur, il faut une unité qui soit une longueur. Pour mesurer une étendue plane, qu'on appelle une *aire*, il faut une unité qui soit elle aussi une aire.

Invariablement, l'unité de longueur ayant été choisie,

l'unité d'aire sera l'aire du carré ayant pour côté cette unité de longueur.

Si, pour mesurer une longueur, il suffit d'y porter bout à bout l'unité choisie, et de compter le nombre de fois qu'on l'a portée ainsi, on comprend qu'un pareil procédé est impossible pratiquement pour une aire; il faudrait y porter le carré unité de manière à la couvrir, ce qui n'est pas réalisable.

Au contraire, pour les figures décrites plus haut, il existe des procédés très simples, pour arriver à déterminer les aires.

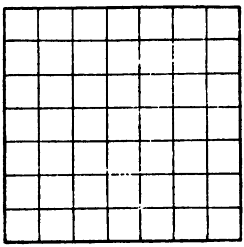


Fig. 45.

Occupons-nous tout d'abord d'un carré. Prenons un papier quadrillé où nous supposons que chaque division soit l'unité de longueur. Par suite, chaque case sera l'unité d'aire.

Sur ce papier quadrillé, dessinons (fig. 45) un carré dont le côté soit de 7 divisions, si bien que la longueur de ce côté a pour mesure 7. Les cases contenues dans ce carré se composent de 7 files, contenant chacune 7 cases; leur nombre total est donc de 7 fois 7, ou $7 \times 7 = 7^2 = 49$. Et comme on pourrait en dire autant d'un carré dont le côté serait d'un nombre quelconque de divisions, a au lieu de 7, l'aire de carré serait de même $a \times a = a^2$, c'est-à-dire que le nombre qui mesure l'aire du carré est la 2ème puissance du nombre qui mesure le côté. C'est pour cela qu'on a nommé carré d'un nombre sa 2ème puissance.

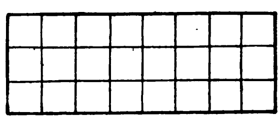


Fig. 46.

Prenons maintenant (fig. 46) un rectangle dont les côtés soient 8 et 3; le nombre des cases, c'est-à-dire le nombre

qui mesurera son aire, sera 8×3; si au lieu de 8 et 3, nous avons a et b, l'aire du rectangle sera mesurée par le produit ab.

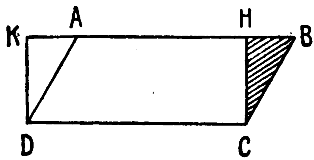


Fig. 47.

Soit à présent (fig. 47) un parallélogramme ABCD, et menons sa hauteur CH. Si, ayant formé, en carton par exemple, ce parallélogramme, nous découpons par un trait suivant CH le triangle CHB ombré sur la figure, et si nous portons ce triangle sur la gauche, en appliquant CB sur DA, nous formons le rectangle CDKH, dont l'aire sera la même que celle du parallélogramme, puisqu'il est composé des mêmes morceaux. Ce rectangle a pour côtés la base CD du parallélogramme, et sa hauteur CH. Donc l'aire d'un parallélogramme a pour mesure le produit des nombres qui mesurent sa base et sa hauteur.

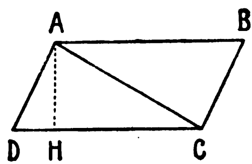


Fig. 48.

Un parallélogramme (fig. 48) étant coupé en deux par un trait suivant la diagonale AC, les deux triangles CBA, ADC, s'appliqueront exactement l'un sur l'autre. Donc le parallélogramme a une aire double de celle du triangle ADC; celui-ci a une aire moitié de celle du parallélogramme. En faisant le produit de la base DC par la hauteur AH, et prenant la moitié de ce produit, on aura le nombre mesurant l'aire du triangle.

Un trapèze (fig. 49) se décompose de même en deux triangles. On déduit de là que pour avoir le nombre qui me-

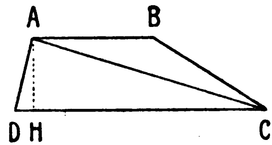


Fig. 49.

sure son aire, il faut multiplier la hauteur AH par la moitié de la somme de ses bases AB, DC.

On peut aussi (fig. 50*a*) transformer un trapèze en un rectangle de même aire. Par les milieux L, M, des côtés AD,

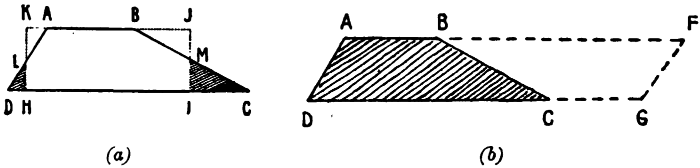


Fig. 50.

BC, il suffit de mener les hauteurs HK, IJ. Les morceaux triangulaires ombrés LDH, MCI, s'appliquent exactement sur LAK et MBJ, et forment ainsi le rectangle. Ceci nous montre que HI, ou LM, est égal à la moitié de la somme des bases AB, CD.

Enfin (fig. 50*b*) si on prolonge le côté AB d'une longueur BF égale à DC, et le côté DC d'une longueur CG égale à AB, la figure AFGD est un parallélogramme ; et en la coupant suivant BC on a deux trapèzes superposables ; chacun d'eux est donc la moitié du parallélogramme, ce qui nous donne encore l'aire d'un trapèze par un nouveau moyen, c'est-à-dire par un simple coup de ciseaux à travers un parallélogramme en carton.

On peut résumer brièvement ce qui précède dans les formules suivantes ;

Carré. — Côté a Aire a^2

Rectangle. — Côtés a, b Aire ab

Parallélogramme. — Base a ; hauteur h Aire ah

Triangle. — Base a ; hauteur h Aire $\frac{ah}{2}$

Trapèze. — Bases a, b ; hauteur h Aire $\frac{(a+b)h}{2}$

Du reste, dès qu'on sait mesurer l'aire d'un triangle, on peut déterminer celle d'un polygone quelconque ABCDEF (fig. 51), puisque par les diagonales AC, AD, AE partant d'un sommet, on peut découper le polygone en triangles ABC, ACD, ADE, AEF.

Il faudra s'exercer beaucoup à déterminer ainsi des aires régulières ; celle d'une porte, d'une fenêtre, d'une table, du parquet ou du plafond d'une pièce, d'une cour, etc. Il suffira pour cela d'un simple mètre en forme de ruban. Suivant les objets, on prendra pour unité de longueur le mètre, le décimètre, le centimètre ; sans avoir encore aucune notion théorique, on se familiarisera de la sorte avec les applications les plus simples du système métrique, on en prendra l'intuition, on aura la notion juste de l'emploi des diverses unités ; et cette acquisition, déjà utile en elle-même, sera plus tard d'un secours bien considérable, lors de la période des études.

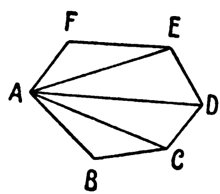


Fig. 51.

24. — Le pont aux ânes.

Il existe en Géométrie une proposition célèbre et importante, mais qui a fait le désespoir de bien des générations

d'écoliers, car la démonstration classique qu'on en donne d'habitude est peu naturelle, et difficile à retenir. Elle est connue sous différents noms ; on l'appelle « le carré de l'hypoténuse », — « Le théorème de Pythagore », (bien qu'on l'ait connue bien des siècles avant Pythagore) — enfin « Le Pont aux ânes », sans doute parce que les élèves médiocres viennent s'y buter, et ont quelque peine à franchir ce passage.

Nous savons déjà ce que c'est qu'un triangle rectangle. Le plus grand côté BC (fig. 52), celui qui est opposé à l'angle droit, s'appelle *hypoténuse*. Si on forme trois carrés BDEC, CFGA, AHIB, ayant pour côtés l'hypoténuse et les deux autres côtés, l'aire du premier sera égale à la somme

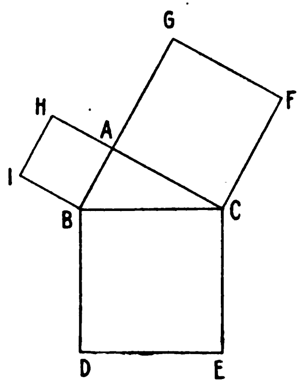


Fig. 52.

des aires des deux autres. C'est en cela que consiste l'énoncé du fameux pont aux ânes.

Or, il existe un moyen très simple de vérifier cette proposition, moyen qui a été inventé dans l'Inde dès l'antiquité la plus reculée, et dont on peut se servir pour constituer une démonstration très correcte quand on étudie la Géométrie — ce que nous ne faisons pas ici.

Prenons un carré (fig. 53 (1) dont le côté soit AB. Mar-

quant un point C entre A et B, construisons, soit en bois, soit en carton, des triangles rectangles ayant AC et CB pour longueurs de leurs côtés de l'angle droit. Il nous suffira d'en avoir quatre. Disposons-les, en les désignant par 1, 2, 3, 4 comme le montre la fig. 53 (1), dont les parties ombrées représentent ces petits triangles. On voit qu'ils forment un dessin qui laisse voir à l'intérieur un carré, lequel a justement pour côté l'hypoténuse. Ce carré est donc ce qui reste quand on a couvert une partie du grand carré avec les quatre triangles. Maintenant, faisons glisser nos quatre triangles de manière à les amener à la position qu'indique la fig. 53 (2). Ce qui reste maintenant, c'est deux carrés, les deux carrés

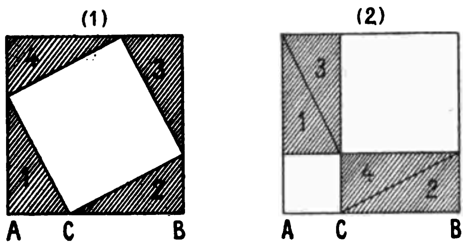


Fig. 53.

construits sur les côtés de l'angle droit. Donc à eux deux, ils ont même aire que le carré de l'hypoténuse de la fig. 53 (1). C'est un jeu de patience des plus simples ; l'enfant qui l'aura pratiqué une fois ou deux ne l'oubliera de sa vie, et ne sera jamais effrayé ni embarrassé à l'approche du pont aux ânes. La plus grande des âneries, c'est de compliquer les choses simples, et de rendre difficile ce qui est aisé.

24. — Divers casse-têtes; macédoine mathématique.

Sur un segment ABC (fig. 54) construisons un carré ACIG ; puis prenant CF = BC, menons FED parallèle à

AC; menons aussi BEH parallèle à CI. Le grand carré se trouve coupé en 4 morceaux par les lignes BH et FD; on peut effectuer le découpage par deux coups de ciseaux. Ces 4 morceaux sont :

1° BCFE, carré ayant pour côté BC

2° EHGD, » » » » DE, qui est égal à AB

3° EFIH, rectangle ayant ses côtés égaux à AB, BC

4° ABED, rectangle pareil au précédent.

Nous venons ainsi de vérifier ce théorème de Géométrie : « Le carré construit sur la somme de deux lignes est équivalent au carré construit sur la première, plus le carré construit sur la seconde, plus deux fois le rectangle construit sur ces deux lignes comme côtés. »

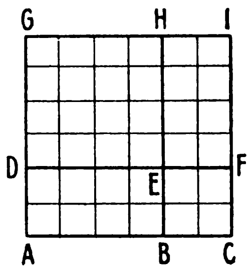


Fig. 54.

Si nous avons fait la figure sur du papier quadrillé, en évaluant les aires de toutes ces figures, c'est-à-dire en comptant les cases, nous avons cette proposition d'Arithmétique :

« Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces deux nombres, plus deux fois leur produit ».

Si nous désignons AB par a, BC par b, nous avons enfin cette formule d'Algèbre :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Voilà trois vérités dont on bourrera trois fois la mémoire des enfants non avertis, alors qu'elles n'en font qu'une seule, sautant aux yeux. Les apparences, les costumes sont distincts ; mais la personne est la même. Le sachant d'avance, on s'épargnera bien du temps perdu, bien des efforts inutiles, et on saura en outre que les classifications de la science sont nécessaires, mais souvent artificielles par la

force des choses; et qu'il faut s'habituer de bonne heure à reconnaître les analogies qu'on rencontre.

Nous allons en constater d'autres. Formons (fig. 55) sur le segment ABC : un carré de côté AB, qui est ABFE; un carré ACJH, de côté AC. Prolongeons BF jusqu'en I; et sur EH construisons le carré EHGD.

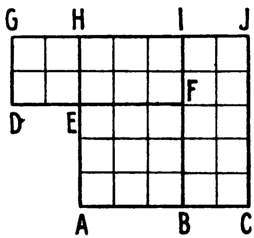


Fig. 55.

Pour avoir le carré ABFE, il faut de la figure totale enlever les rectangles BCJI, FIGD; la figure totale se compose de la réunion de deux carrés dont les côtés sont égaux à AC et à BC; les deux rectangles sont pareils, et leurs côtés sont égaux à AC et BC; enfin AB est la différence de AC et BC. Donc :

Géométrie. — Le carré construit sur la différence de deux segments est équivalent à la somme des carrés construits sur ces deux segments, moins deux fois le rectangle construit sur les deux segments comme côtés.

Arithmétique. — Le carré de la différence de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces nombres, moins deux fois leur produit.

Algèbre. — On a la formule $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Encore un exemple, que nous montre la figure 56. ABJH est un carré, ACGD un rectangle; FG, FJ, DE sont égaux à BC, DEIH est un carré.

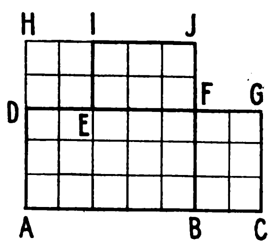


Fig. 56.

Le rectangle ACGD a ainsi pour côtés AB + BC et AB — BC; comme les deux rectangles BCGF, FJIE sont identiques, en enlevant le premier et le mettant à la place

du second, on aura ABJIED, qui est la différence des carrés ABJH, DEIH, construits sur AB et DE = BC. Ainsi :

Géométrie. — Le rectangle ayant pour côtés la somme et la différence de deux segments est équivalent à la différence des carrés ayant pour côtés ces deux segments.

Arithmétique. — Le produit de la somme de deux nombres par leur différence est égal à la différence de leurs carrés.

Algèbre. — On a la formule $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Et pour vérifier tant de propositions, concernant tant de sciences, il suffit de découper avec soin quelques morceaux de carton, après avoir fait avec soin quelques figures.

On a quelquefois appelé casse-tête ces jeux de découpages. C'est bien injuste ; car employés comme nous venons de le dire, ils évitent au contraire bien des cassements de tête futurs, en instruisant par les yeux.

26. — Le cube en huit morceaux.

Prenons (fig. 57) un cube en bois, et à partir d'un des sommets O, portons, sur les trois arêtes qui y aboutissent, trois longueurs égales entre elles OA, OB, OC. Par chacun des trois points ainsi obtenus, supposons qu'on fasse passer un trait de scie, AAA, BBB, CCC.

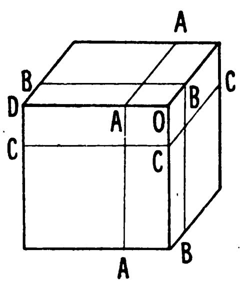


Fig 57.

On coupera de la sorte le cube en huit morceaux. Pour se rendre compte de ce qu'ils seront, ce qu'on verrait mieux encore sur l'objet lui-même, appelons (fig. 57) a la longueur DA et b la longueur AO, et construisons la figure 58. Les deux parties dont elle se compose représentent ce qu'on voit, après les coupes suivant

AAA et BBB quand on regarde le cube par-dessus. En outre, les lettres (*a*) (*b*) entre parenthèses indiquent l'épaisseur après la coupe suivant CCC. La figure de gauche représente ce qui est au-dessous de CCC et celle de droite ce qui est au-dessus.

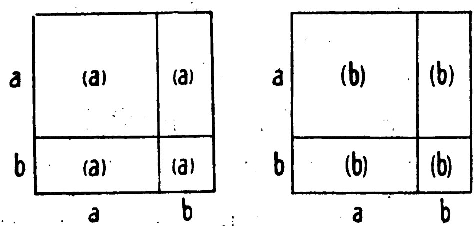


Fig. 58.

Nous voyons bien ainsi que nous aurons huit parallélépipèdes dont les dimensions seront :

fig. de gauche	*aaa*	*aba*	*bba*	*baa*
fig. de droite	*aab*	*abb*	*bbb*	*bab*

Cela nous donne donc :

un cube dont l'arête est *a* ;
» » » » » *b* ;
3 parallélépipèdes ayant pour dimensions *a*, *a*, *b* ;
3 » » » » *a*, *b*, *b* ;

L'arête du cube que nous avons coupé en huit morceaux était $a + b$.

Nous vérifions ainsi que le cube construit sur la somme de deux segments *a*, *b* se compose :

1° de la somme des cubes construits sur chacun des segments ;

2° de 3 fois un parallélépipède ayant pour base un carré de côté *a*, et pour hauteur *b* ;

3° de 3 fois un parallélépipède ayant pour base un carré de côté b, et pour hauteur a.

Ça, c'est de la Géométrie.

La même figure nous montre qu'en Arithmétique : Le cube de la somme de deux nombres est égal à la somme des cubes de ces deux nombres, plus trois fois le produit du premier par le carré du second, plus trois fois le produit du second par le carré du premier.

Enfin (Algèbre) cela donne la formule

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Ceci est tout à fait analogue à ce que nous avons fait pour le carré d'une somme dans le n° précédent.

Avec de petits cubes en bois assez nombreux, on peut faire la construction indiquée, et bien d'autres encore. Ce sont des petits jeux de construction qui, dirigés avec un peu de méthode, aident beaucoup l'enfant à voir les figures dans l'espace, et provoquent son attention.

A la rigueur, le découpage du cube pourrait se faire au moyen d'un morceau de savon tiré d'une barre, en le coupant avec soin par un fil métallique qui remplacerait l'action de la scie. Mais le cube de bois est encore préférable, et n'est certes ni difficile ni onéreux à se procurer.

27. — Les nombres triangulaires. — Le vol des grues.

Edouard Lucas attribue à l'observation du vol de certains oiseaux l'origine des nombres qu'on a appelés *triangulaires*. En tête vole un seul oiseau ; derrière lui, sur une seconde ligne, s'en trouvent deux ; sur une troisième ligne, en arrière, il y en a trois ; et ainsi de suite ; si bien que la disposition générale de la colonne volante présente l'apparence d'un triangle.

Il est facile de se faire une idée précise de ces nombres et de les représenter sur un dessin quadrillé, en regardant, par exemple, la figure 59 et en y considérant tout d'abord la partie A seulement, qui nous montre, en haut, 1 case, puis 2 cases sur une seconde ligne, puis 3, 4, 5, 6, 7 cases sur les lignes suivantes, jusqu'à la 7ème.

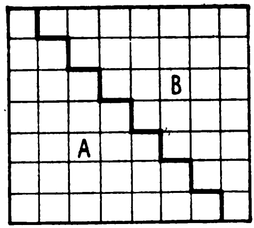


Fig. 59.

Nous avons donc là le 7ème nombre triangulaire

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7;$$

pour l'évaluer, nous pourrions faire l'addition, ce qui nous donnerait 28. Mais cela ne nous apprendrait rien sur tout autre nombre triangulaire. Si nous voulions avoir le 1000ème, par exemple, il faudrait ajouter les nombres de 1 à 1000, ce qui serait long et bien ennuyeux. Au lieu de cela, regardez maintenant la figure 59 tout entière ; la partie B, si nous la regardons de bas en haut, ou si nous la retournons sens dessus dessous, nous représente encore, par le nombre de ses cases, le même nombre triangulaire. La figure entière représente donc deux fois le nombre triangulaire en question ; et comme elle se compose de sept lignes, ayant chacune huit cases, le nombre total des cases est 7×8, et le nombre cherché sera la moitié de ce produit, c'est-à-dire 28.

Nous aurons, en d'autres termes,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{7.8}{2} = 28.$$

Si on voulait avoir le 1000ème nombre triangulaire, en supposant qu'on ait fait de même, on aurait

$$1 + 2 + 3 + \dots + 1000 = \frac{1000.1001}{2} = 500500.$$

C'est plus court que de faire l'addition.

Et comme, au lieu de 1000, on pourrait avoir n'importe quel nombre entier n, on a aussi

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

expression qui nous permettra de trouver le $n^{\text{ème}}$ nombre triangulaire, que nous pouvons appeler T_n.

Le nombre total des cases de la figure 59 est $2\,T_n$. Si nous enlevons la dernière colonne, il reste un carré de 7 lignes, contenant chacune 7 cases. On voit aussi que la nouvelle figure est formée de l'assemblage des nombres triangulaires T_6 et T_7. On a ainsi

$$2T_7 - 7 = 7^2 = T_7 + T_6.$$

Si nous ajoutons en bas une ligne nouvelle de 8 cases, nous voyons de même qu'on a

$$2T_7 + 8 = 8^2 = T_8 + T_7,$$

rien qu'en regardant la figure.

Et comme, au lieu de 7, nous aurions pu prendre tout autre nombre n,

$$2T_n - n = n^2 = T_n + T_{n-1},$$
$$2T_n + n + 1 = (n+1)^2 = T_{n+1} + T_n.$$

Voilà des formules qui paraissent bien savantes et qui cependant n'exigent pas même le moindre calcul, puisqu'*on les lit* sur les figures, puisqu'*on les voit*, puisqu'on peut les construire de ses mains avec des petits carrés de bois ou même avec de simples jetons, en en plaçant un dans chaque case.

28. — Les nombres carrés.

Prenons (fig. 60) un carré, composé de 7 lignes, de 7 cases chacune, soit en tout $7.7 = 7^2 = 49$ cases. Sur cette

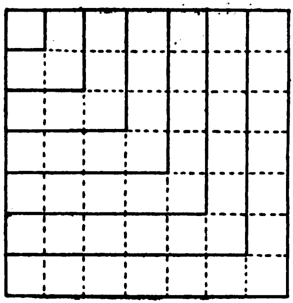


Fig. 60.

figure, au moyen des lignes tracées, nous voyons les carrés successifs de $1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ cases.

Le premier carré, de 1 case est figuré par la case du haut, à gauche. Pour passer de ce carré à celui de 2^2 ou 4 cases, nous remarquons qu'il a fallu ajouter 3 cases, de sorte que $1 + 3 = 2^2$, pour passer au carré suivant, de 9 cases, il faut en ajouter deux à droite, deux en dessous, et une à droite et en bas, ce qui fait 5; et en continuant de la même manière, nous arrivons à voir que :

$$7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13.$$

C'est-à-dire que le carré de 7 est égal à la somme des 7 premiers nombres impairs.

Au lieu de 7, prenons un nombre entier quelconque, n. Les premiers nombres impairs sont 1, 3, 5,... et le $n^{ème}$ est $2n - 1$. Comme la figure a pu être faite jusqu'à ce nombre n, nous avons :

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots.. + 2n - 1,$$

et ceci ne fait que traduire ce que nous voyons dans la figure 60.

Cela nous montre qu'il y a une autre manière de représenter les nombres carrés ; elle est indiquée par la figure 61 où l'on voit les carrés de 1, de 2, de 3 et de 4. Avec de

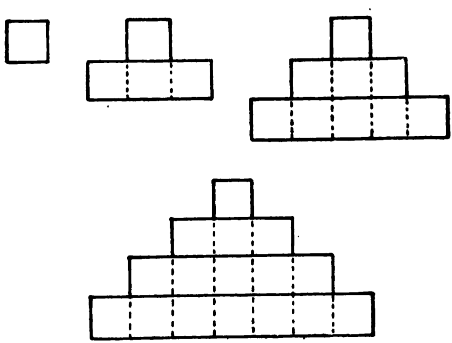


Fig. 61.

petits carrés de bois, il sera facile de construire et de transformer ces diverses figures.

Nous allons arriver maintenant, sans aucune peine, à résoudre une question bien plus difficile, en cherchant la somme des carrés de 1, 2, 3, 4 par exemple. En nous servant de la figure 60 et en plaçant les carrés de 1, 2, 3, 4 de bas en haut, nous avons immédiatement la figure 62, qui se passe de toute explication. En nous servant des divers éléments de la figure 61, nous voyons qu'il y a :

4 lignes de 1 case
3 lignes de 3 cases
2 lignes de 5 cases
1 ligne de 7 cases

qui, réunies les unes au-dessous des autres, donnent la figure 63.

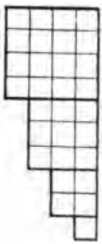


Fig. 62.

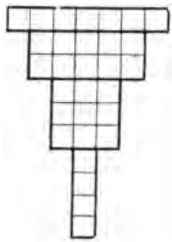


Fig. 63.

Assemblons maintenant (fig. 64) la figure 62, la même figure retournée, et la figure 63. Nous obtenons un rec-

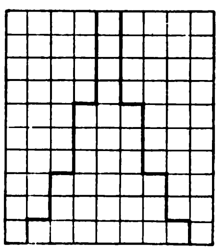


Fig. 64.

tangle, qui contiendra trois fois le nombre de cases cherché.

Le nombre des lignes de ce rectangle est :

$$1 + 2 + 3 + 4, \text{ ou } \frac{4.5}{2} = 10.$$

Le nombre des cases contenues dans chaque ligne est, comme nous pouvons le voir sur la première ligne,

$$4 + 1 + 4, \text{ ou } 2.4 + 1 = 9$$

Le nombre total des cases est donc 10.9 = 90, et le nombre cherché sera le tiers de 90, c'est-à-dire 30. Nous vérifions bien en effet que :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Mais si, au lieu de 4 nous avions pris un nombre n quelconque, et si nous avions fait exactement la même chose, le rectangle de la figure 64 aurait :

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n, \text{ ou } \frac{n(n+1)}{2} \text{ lignes}$$

et $2n + 1$ colonnes.

Le nombre total de ses cases serait donc

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

et pour avoir le nombre cherché, il faudrait en prendre le tiers. Cela nous montre que :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

C'est une formule que les candidats à l'Ecole Polytechnique ne savent pas toujours démontrer, tout en se donnant beaucoup de mal et en calculant beaucoup, et qui s'établit en jouant avec de petits carrés de bois, comme celles que nous avons déjà vues.

Cette détermination de la somme des carrés des n premiers nombres entiers avait jadis une application pratique assez importante, dans l'artillerie, lorsqu'on employait des projectiles sphériques (boulets ou obus). On les rangeait souvent, en effet, dans les arsenaux, en formant un carré sur le sol, puis, par-dessus, un nouveau carré plus petit, et ainsi de suite jusqu'au sommet, qui était formé d'un seul boulet. C'est ce qu'on nommait une *pile de boulets à base carrée*. Dès lors, pour compter les boulets contenus dans une pile, il suffisait de compter le nombre n des boulets sur un côté de la base, et d'appliquer la formule ci-dessus. Par exemple, si $n = 17$, la somme cherchée est

$$\frac{17.18.35}{6} \text{ ou } 1785.$$

On peut s'amuser à former de la même manière des piles d'oranges, pourvu que celles-ci soient à peu près de même grosseur, ou, plus simplement peut-être, des piles de billes à jouer, en les disposant sur une légère couche de sable, afin qu'elles ne roulent pas, ce qui ferait alors écrouler l'édifice.

29. — La somme des cubes.

Pour représenter un nombre élevé au cube, comme $2^3 = 2.2.2$, $3^3 = 3.3.3$, etc., il serait commode d'avoir un grand nombre de petits cubes en bois, un peu plus gros que des dés à jouer, et qui serviraient à faire les constructions dont nous avons parlé plus haut, et les diverses opérations que nous allons indiquer.

Mais on peut arriver à s'en passer à la rigueur, et à remplacer chaque unité par un petit carré plat, de bois ou de carton, ou même par un simple jeton. C'est cette dernière

supposition que nous admettrons; quand on aura vu combien les opérations sont faciles, on les fera, à plus forte raison, au moyen de carrés ou de cubes; qui peut le plus, peut le moins.

Commençons par voir comment, avec nos jetons, nous pourrons représenter les cubes successifs. Le cube de 1 est 1 : un seul jeton le représentera.

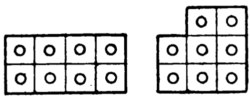


Fig. 65.

Le cube de 2 est $2 \times 2 \times 2$, ou 8 ; il sera donc composé (fig. 65) de 2 carrés de 4 jetons chacun, carrés juxtaposés l'un contre l'autre, dans la première partie de la figure. Mais, comme on le voit dans la 2ème partie, ces 8 jetons peuvent être disposés d'une autre manière, en gardant les trois premières colonnes et en plaçant au-dessus la quatrième qui est devenue horizontale.

Passons au cube de 3 ; c'est $3 \times 3 \times 3$, ou 27 ; on le représentera (fig. 66) par 3 carrés de 9 jetons chacun, juxtaposés, dans la première partie de la figure. On obtient

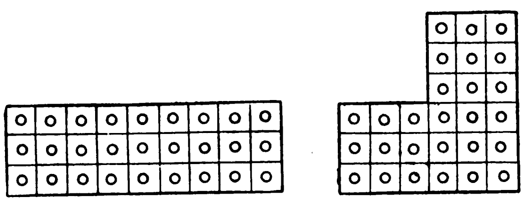


Fig. 66.

la 2ème partie en gardant les 6 premières colonnes et plaçant au-dessus les 3 dernières devenues horizontales.

Enfin, pour le cube de 4, nous ferons de même, en conservant (fig. 67) les 10 premières colonnes de la première

partie, et plaçant au-dessus les 6 dernières, rendues horizontales, pour avoir la 2ème partie de la figure.

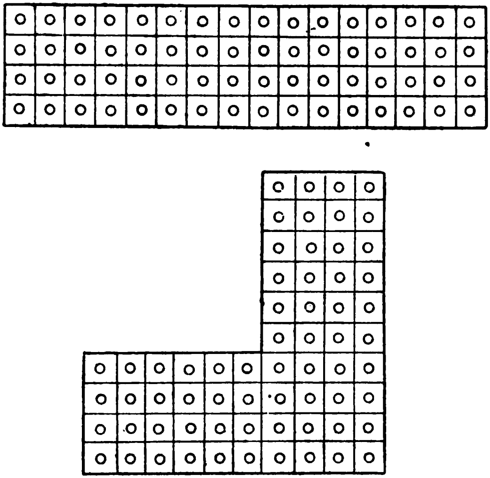


Fig. 67.

Si nous assemblons maintenant (fig. 68) les 2èmes parties des figures 65, 66, 67, en y ajoutant un jeton à gauche en

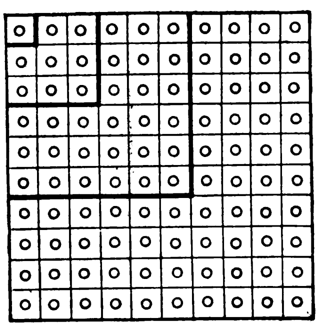


Fig. 68.

haut qui représentera le cube de 1, nous aurons la somme des cubes de 1, 2, 3, 4 sous la forme d'un carré, dans lequel le nombre des jetons d'une ligne ou d'une colonne est 1 + 2 + 3 + 4 ou 10. La somme de ces cubes est donc 100.

Il y a intérêt à prendre des jetons de couleurs différentes pour représenter chacun des cubes. La figure sera alors d'autant plus frappante.

La méthode de construction indiquée pourrait être poussée ainsi jusqu'au cube d'un nombre n quelconque, et montre que *la somme des cubes des* n *premiers nombres entiers est égale au carré de la somme de ces nombres.*

Cela se traduit par la formule :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

C'est une expression qui peut encore s'écrire $(T_n)^2$, ou

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

C'est encore là un résultat qu'il est beaucoup plus pénible et difficile d'obtenir par le calcul. Nous y arrivons ici par un simple jeu de construction [1].

[1] Il n'est peut-être pas mauvais de remarquer que dans notre table de multiplication sans chiffres (fig. 12) on retrouve justement comme nombres de cases les cubes successifs 2^3, 3^3,... dans les enceintes qui séparent les carrés de 1, 1 + 2, 1 + 2 + 3,.. A la rigueur, on aurait donc pu, sur cette simple table, constater tout ce que nous venons de voir ici.

30. — Les puissances de 11.

Si l'on prend le nombre 11, et qu'on cherche à en former le carré, la multiplication sera bien facile

$$\begin{array}{r} 11 \\ \underline{11} \\ 11 \\ \underline{11} \\ 121 \end{array} \qquad 11^2 = 121$$

Pour obtenir le cube, nous aurons

$$\begin{array}{r} 121 \\ \underline{11} \\ 121 \\ \underline{121} \\ 1331 \end{array} \qquad 11^3 = 1331$$

La 4ème puissance donnerait lieu à la multiplication ci-dessous

$$\begin{array}{r} 1331 \\ \underline{11} \\ 1331 \\ \underline{1331} \\ 14641 \end{array} \qquad 11^4 = 14641$$

Fixons notre attention sur ces chiffres

1, 2, 1 ; 1, 3, 3, 1 ; 1, 4, 6, 4, 1

qui servent à écrire les puissances.

Nous aurions pu les avoir, avec moins d'écritures, sans poser les multiplications, si nous remarquons, d'abord qu'on commence et qu'on finit par 1 ; et en outre qu'on n'a jamais qu'à ajouter deux chiffres qui se suivent, pour avoir un chiffre de la puissance suivante :

Ainsi de 11 on tire 121, parce que $1 + 1 = 2$;
De 121 on tire 1331, parce que $1 + 2 = 3$, $2 + 1 = 3$;
De 1331 on tire 14641, parce que $1 + 3 = 4$, $3 + 3 = 6$, $3 + 1 = 4$.

Ces remarques ont conduit à des moyens d'obtenir ces chiffres (et beaucoup d'autres nombres), très facilement, comme nous allons le voir au n° suivant.

C'est d'autant plus utile que les nombres dont il s'agit sont d'une grande importance en Algèbre, où on les retrouvera plus tard, si on étudie tant soit peu les mathématiques.

31. — Triangle et carré arithmétiques.

Ecrivons (fig. 69) des chiffres 1 les uns au-dessous des autres, autant que nous le voudrons. Supposons qu'à droite du premier 1, en haut, il y ait des zéros, que nous nous dispensons d'écrire. Nous formons la 2ème ligne en ajoutant 1 et 0, ce qui donne 1, et écrivant ce 1 à droite de celui qui est déjà inscrit. Passons à la 3ème ligne; nous lisons dans la 2ème : 1 et 1, 2, que nous écrivons; puis 1 et 0, 1, que nous plaçons à droite du 2 ; de même, en partant de la 3ème ligne, nous formons la 4ème : 1 et 2, 3; 2 et 1, 3; 1 et 0, 1. Et ainsi de suite, aussi loin qu'on le voudra. Les premières lignes de la figure nous donnent les chiffres rencontrés tout à l'heure pour les puissances de 11.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

....

Fig. 69.

Ce tableau s'appelle du nom de son illustre inventeur, le *triangle arithmétique de Pascal*[1].

[1] Blaise PASCAL, savant et littérateur français, né à Clermont-Ferrand (1623-1662).

Les mêmes nombres (fig. 70) apparaissent dans une figure qui ne diffère de la précédente que par sa disposition. On écrit le chiffre 1 partout dans les cases d'une première ligne et dans celles d'une première colonne d'un carré quadrillé. Ensuite on remplit successivement toutes les autres cases en mettant dans chacune la somme du nombre qu'on lit au-dessus avec celui qu'on lit à gauche.

1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	6	10	15	21	28	36
1	4	10	20	35	56	84	
1	5	15	35	70			
1	6	21	56				
1	7	28	84				
1	8	36					

Fig. 70.

Ici, les chiffres 1, 1 ; 1, 2, 1 ; 1, 3, 3, 1 ;... apparaissent, non plus dans les lignes horizontales, mais dans les obliques montant de gauche à droite.

Ce tableau de la figure 70 est appelé *carré arithmétique de Fermat*[1].

Si l'on considère (fig. 71) un échiquier ordinaire, la case du coin gauche O et une case quelconque X, on peut se demander par combien de chemins différents une tour pourrait se rendre de O en X, sans jamais rétrograder, c'est-à-dire en marchant toujours de gauche à droite et de haut en bas. Le carré arithmétique de Fermat donne la réponse, si on l'applique sur l'échiquier. Ainsi pour la figure 71 telle qu'elle est indiquée, il y a 84 routes différentes à suivre pour une tour partant de O et se rendant en X.

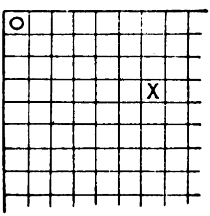


Fig. 71.

[1] Pierre FERMAT, mathématicien français, né à Beaumont de Lomagne (1601-1665). C'est probablement le plus puissant génie qui ait jamais existé au point de vue arithmétique.

Les nombres de ces tableaux jouissent encore de curieuses et nombreuses propriétés. Mais il serait prématuré de s'en occuper actuellement.

32. — Les numérations diverses.

Quand nous avons commencé (n° 3) à former les nombres au moyen de bâtonnets, puis de paquets, de fagots, etc., ce qui amène à la numération, nous aurions pu tout aussi bien, pour construire un paquet, prendre tout autre nombre que dix bâtonnets.

Par exemple, on aurait pu convenir que 8 bâtonnets formeraient un paquet, 8 paquets un fagot, et ainsi de suite. Il en serait résulté que les chiffres nécessaires pour écrire un nombre quelconque (n° 10) seraient seulement 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, auxquels, bien entendu, il faudrait adjoindre le zéro.

Une telle méthode pour écrire les nombres est ce qu'on appelle un *système de numération*, et le nombre choisi s'appelle *base* de ce système.

Ainsi, le système que nous avons vu jusqu'ici et qui est universellement en usage s'appelle le système décimal, et a pour base 10. Celui que nous venons d'indiquer aurait pour base 8 et pourrait être appelé système octaval.

Si on prenait 12 pour base d'un système, qu'on appellerait système duodécimal, on réunirait 12 bâtonnets pour faire un paquet, 12 paquets pour faire un fagot, et ainsi de suite. Il faudrait alors, en dehors du zéro, avoir onze chiffres, savoir les 9 de la numération décimale, et deux autres pour représenter 10 et 11.

Quand un système de numération a pour base un nombre B, il exige toujours B—1 chiffres, sans compter le zéro ; et le nombre B s'écrit invariablement 10.

Il n'est pas mauvais de savoir écrire un nombre dans un

système de numération quand on vous le donne, écrit dans un autre; et c'est tout à fait facile.

Par exemple, on nous donne 374 écrit dans le système de base 8. Tâchons de l'écrire dans le système décimal. Si nous pensons à nos bâtonnets, nous voyons que le nombre en question contient

4 bâtonnets	4
7 paquets de 8 bâtonnets	56
3 fagots de 8 × 8 bâtonnets	192
	252

En pratique, on arriverait encore plus vite au même résultat, en partant de la gauche, en disant : 3 fagots de 8 paquets, plus 7 paquets, cela donne 31 paquets; 31 paquets, de 8 bâtonnets, cela fait 248 ; plus 4, cela donne 252.

Si au contraire, le nombre 598 étant écrit dans le système décimal, nous voulons l'avoir dans le système de base 8, nous n'aurons qu'à enlever 8 tant que nous le pourrons, et le reste sera le dernier chiffre à droite. Il faut donc faire la division de 598 par 8, et prendre le reste, qui est 6; cette opération nous donne en même temps le nombre 74 des paquets de 8; en divisant par 8, nous avons le nombre des fagots, 9, et il reste 2 paquets; 2 est le 2ème chiffre. En divisant 9 par 8, nous voyons enfin qu'il reste un paquet (1 est le 3ème chiffre) et que nous avons 1 boite (1 est le 4ème chiffre).

L'opération d'ensemble s'écrira

```
598 | 8
38    74 | 8
 6     2   9 | 8
           1   1
```

et 1126 est le nombre demandé, écrit dans le système de base 8.

Si on voulait écrire ce même nombre dans le système de base 12, on aurait

598	12	
118	49	12
10	1	4

et le résultat serait 41 (10) en figurant par (10) le chiffre 10 du système duodécimal.

Nous avons vu plus haut que 374 (système 8) s'écrit 252 (système décimal). Dans le système de base 12, on trouverait qu'il s'écrit 190.

On passe ainsi comme on veut d'un système à un autre par l'intermédiaire du système décimal.

Avec un peu d'habitude on arrive à calculer dans un système de numération quelconque; le point essentiel, c'est de ne pas oublier que les retenues se feront, non plus par dizaines mais par groupes de B, si B est la base; et il faut pour cela une certaine habitude.

Nous donnons ci-dessous le nombre 1000 de la numération décimale, écrit dans les systèmes de numération de bases 3, 4, 5,... jusqu'à 12.

B = 3 . . .	1101001
4 . . .	33220
5 . . .	13000
6 . . .	4344
7 . . .	2626
8 . . .	1750
9 . . .	1331
10 . . .	1000
11 . . .	82(10)
12 . . .	6(11) 4

Voici une application, digne de remarque, du système de numération de base 3, combiné avec l'emploi de chiffres négatifs; les chiffres se réduisent alors à 0, + 1, — 1. Elle est d'autant plus intéressante qu'elle peut se prêter à un emploi pratique dans certaines questions relatives aux ascenseurs hydrauliques[1].

M. Marcel Deprez, membre de l'Institut, à qui nous devons le transport de l'énergie par l'électricité, a bien voulu me communiquer une remarque curieuse sur le système de poids à employer pour effectuer des pesées au moyen d'une balance. On suppose qu'on puisse placer des poids dans les deux plateaux. Dans ces conditions, le problème qu'on se propose est de déterminer un système de poids (un seul poids de chaque espèce) à partir de 1 gramme, par exemple, de manière qu'il soit possible d'équilibrer par ce moyen des corps pesant 1, 2, 3 ... grammes jusqu'à une limite déterminée.

On voit qu'avec les 2 poids 1 gramme et 3 grammes, on peut peser jusqu'à 4 grammes, puisque $2 = 3 - 1$ et $4 = 3 + 1$.

En prenant les 3 poids 1, 3, 9 grammes, on peut peser jusqu'à 13 grammes.

En général, si on a pris les n poids, 1, 3 ..., 3^{n-1} grammes, on pèsera jusqu'à $\frac{3^n - 1}{2}$ grammes. Par exemple, avec les 7 poids 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 grammes, on peut peser depuis 1 jusqu'à 1093 grammes.

Cette question, comme on pourra s'en rendre compte, revient à l'écriture des nombres successifs dans le système de base 3 en utilisant des chiffres négatifs. Alors, au lieu des chiffres 1, 2 on emploie 1, $\overline{1}$; et $\overline{1}$ indique que le poids correspondant doit être placé dans le second plateau de la balance.

[1] Cette application, dans l'édition précédente, figurait à la fin du volume, sous le titre *Note sur une question de pesées.*

Par exemple, 59 s'écrit dans ce système $1\ \bar{1}\ 1\ \bar{1}\ \bar{1}$, car $59 = 81 - 27 + 9 - 3 - 1$. Pour peser 59 grammes, on mettra les poids 81 et 9 dans un plateau, et 27, 3, 1 dans le plateau opposé; en ajoutant dans ce dernier un corps pesant 59 grammes, il y aura équilibre.

Il peut être intéressant d'ajouter ici quelques observations concernant la numération romaine. Elle n'est plus guère en usage que pour marquer les heures sur les cadrans des montres ou des pendules. Il est bon de la connaître aussi pour déchiffrer les dates dans de vieilles inscriptions; mais voilà tout; si bien qu'elle présente un médiocre intérêt mathématique actuel. Au point de vue pédagogique, il n'en est pas de même. Je me bornerai à résumer à ce sujet des remarques qui me furent présentées, il y a bien des années, par M. Godard, alors directeur de l'Ecole Monge.

Si l'on trace avec soins des bâtons égaux régulièrement espacés, sur un tableau noir par exemple, et si on demande brusquement le nombre composant un tel groupe à un observateur non prévenu d'avance, la réponse sera immédiate tant que le groupe sera de deux, trois ou quatre; au delà, c'est-à-dire pour cinq et au-dessus, il faut une opération préliminaire de l'esprit, qui peut être très rapide, une décomposition mentale du nombre, et la réponse, en réalité, ne résulte plus de la vision directe. C'est là un fait qui semble bien acquis et qui est vérifié par de très nombreuses expériences.

D'autre part, on remarque que le nombre cinq joue un rôle capital dans la numération romaine.

On s'est alors demandé si celle-ci n'aurait pas tiré son origine première du fait physiologique que nous venons de signaler, et si ses symboles d'écriture ne proviennent pas des dispositions anatomiques de la main de l'homme.

Les nombres un, deux, trois, quatre, seraient figurés par un, deux, trois, quatre doigts levés :

I, II, III, IIII;

Cinq, c'est la main tout entière qui, si l'on tient le pouce en l'air, écarté des autres doigts, représente assez bien la forme de la lettre V. Dix, ce sera la réunion de deux mains, dirigées l'une vers le haut, V, l'autre vers la bas, Λ, ce qui donne la lettre X.

Nous ne voulons parler ici que des principes mêmes de la numération romaine, et nous nous abstenons de signaler les autres symboles L, C, M,... Remarquons cependant qu'on évite toujours d'arriver à la répétition consécutive d'un même signe au delà de quatre fois.

Pour obtenir les nombres compris entre cinq et six, on met les unités à la suite du signe V :

VI, VII,...

De même pour les nombres supérieurs à dix :

XI, XII,...

Il est vraisemblable que par un perfectionnement ultérieur, mais pourtant fort ancien, on a eu l'idée d'opérer la soustraction en plaçant l'unité, (ou d'autres symboles) *à la gauche* d'un signe déterminé, au lieu de les mettre *à la droite* ce qui représenterait l'addition. C'est ainsi qu'on a obtenu les écritures

IV, IX, XL,...

signifiant cinq moins un, ou quatre; dix moins un, ou neuf; cinquante moins dix, ou quarante; et bien d'autres analogues. Il est fort remarquable de constater ici, sous forme embryonnaire en quelque sorte, cette première tentative de traduction graphique du *signe* par le *sens*.

Ces observations m'ont paru assez curieuses pour mériter d'être mentionnées. Il semble bien en résulter que la numération romaine fut une numération de base cinq, mais incomplète, parce qu'elle n'usait pas de symboles différents pour représenter les quatre premiers nombres, et surtout parce qu'elle n'avait pas la ressource précieuse du zéro, ce pivot central de toute numération rationnelle, ce *rien* qui est *tout* en Arithmétique.

33. — La numération binaire.

Nous avons vu, dans le numéro précédent, que si B est la base d'un système de numération, ce système exige B — 1 chiffres, en dehors du zéro. Si on prend 2 pour base, il n'y aura donc lieu d'employer qu'un seul chiffre, le chiffre 1.

L'idée de cette numération où tous les nombres s'écrivent au moyen de deux seuls caractères 1 et 0, semble appartenir à Leibniz[1], bien qu'on prétende que les Chinois en auraient fait usage en des temps très reculés.

Pour l'usage habituel du calcul, ce système aurait l'inconvénient d'allonger beaucoup les écritures. Ainsi le nombre 1000 de la numération décimale, s'écrirait, dans le système binaire, 1111101000. Ce serait un nombre de dix chiffres. Mais dans certaines applications scientifiques, la numération binaire est d'un emploi utile et intéressant. Elle donne en outre l'explication de certains jeux, tels que le baguenaudier et la Tour d'Hanoï. Enfin on a imaginé un petit jeu de salon qui repose sur l'emploi de la numération binaire, et dont Ed. Lucas a reproduit la description dans son *Arithmétique amusante* sous le nom d'*Eventail mystérieux*.

Pour faire comprendre en quoi il consiste, supposons qu'on ait écrit les 31 premiers nombres en numération binaire :

1	1				
2	10	12	1100	22	10110
3	11	13	1101	23	10111
4	100	14	1110	24	11000
5	101	15	1111	25	11001
6	110	16	10000	26	11010
7	111	17	10001	27	11011
8	1000	18	10010	28	11100
9	1001	19	10011	29	11101
10	1010	20	10100	30	11110
11	1011	21	10101	31	11111

[1] Leibniz, mathématicien et philosophe allemand, né à Leipzig (1646-1716).

Maintenant, sur un carton A, écrivons (système décimal) tous ceux de ces nombres qui sont terminés par 1 (système binaire) :

A	B	C	D	E
1	2	4	8	16
3	3	5	9	17
5	6	6	10	18
7	7	7	11	19
9	10	12	12	20
11	11	13	13	21
13	14	14	14	22
15	15	15	15	23
17	18	20	24	24
19	19	21	25	25
21	22	22	26	26
23	23	23	27	27
25	26	28	28	28
27	27	29	29	29
29	30	30	30	30
31	31	31	31	31

Sur un 2ème carton B, nous inscrivons de même les nombres dont le 2ème chiffre à partir de la droite est un 1 en numération binaire ; puis de même (cartons C, D, E) pour les 3ème, 4ème, 5ème chiffres.

Si ayant confié ces 5 cartons à une personne, vous l'invitez à penser un nombre, et à vous présenter les cartons sur lesquels le nombre est inscrit, et ceux-là seulement, cela revient à vous indiquer les chiffres qui permettent de l'écrire en numération binaire. Il est bien facile de vérifier que pour trouver le nombre, il n'y a qu'à ajouter les premiers nombres figurant sur chaque carton. Soit par exemple 25 le

nombre pensé ; on vous présente les cartons A, D, E, commençant par 1, 8, 16 ; $1 + 8 + 16 = 25$.

On peut d'une part, pousser ce jeu jusqu'à 63 au lieu de 31, avec 6 cartons au lieu de 5, et jusqu'à 127 avec 7 cartons. D'un autre côté, on peut rendre l'apparence de la divination plus mystérieuse en remplaçant les nombres par des noms propres. On a une liste de concordance faite une fois pour toutes entre les noms et les nombres, et on se rappelle que les divers cartons commencent par 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

Chacun peut composer soi-même, très facilement, cet ensemble de cartons, jusqu'à 7 par exemple. Et si l'on n'arrive pas ainsi à passer pour sorcier, on aura du moins l'avantage de s'exercer à faire rapidement et sûrement des additions de tête. Sans quoi on serait exposé à perdre tout prestige.

34. — Les progressions par différence.

Prenons une suite de nombres :

$$4 \quad 7 \quad 10 \quad 13$$

par exemple, tels que la différence de deux de ces nombres qui se suivent soit toujours la même :

$$7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 3.$$

Une telle suite est appelée *une progression par différence*,

La différence constante, 3 dans cet exemple, est la *raison* de la progression.

Les nombres 4, 7, 10, 13 sont les *termes* de la progression. Nous n'en avons ici écrit que quatre, mais on pourrait en former autant qu'on le voudrait.

On peut remarquer que la suite des nombres entiers 1, 2, 3,... forme une progression par différence de raison 1, et que la suite des nombres impairs 1, 3, 5,... forme une progression par différence de raison 2.

Cherchons (fig. 72) à représenter graphiquement la progression 4, 7, 10, 13, prise ci-dessus pour exemple. Sur un papier quadrillé, comptant 4 cases sur une première ligne (et les représentant par des jetons noirs), nous porterons 7 cases

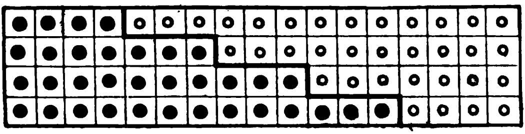


Fig. 72.

sur la 2ème ligne, 10 sur la 3ème, 13 sur la 4ème. Puis ajoutant 4 cases à cette dernière ligne et achevant le rectangle, nous voyons que ce rectangle contient deux fois les termes de la progression, représentés par des jetons noirs et des jetons blancs.

Nous vérifions aussi que la somme des termes extrêmes est la même que celle de deux termes équidistants des extrêmes. Enfin, la somme des termes de la progression sera la moitié du nombre des cases du rectangle, c'est-à-dire $\frac{17 \times 4}{2}$.

En général, si a et l sont les deux termes extrêmes et si n est le nombre des termes, cette somme est exprimée par :

$$\frac{(a + l)\, n}{2}$$

Si $a = 1$ et si la raison est 1, alors $l = n$, et on a $\frac{n(n+1)}{2}$,

Si $a = 1$ et si la raison est 2, alors $l = 2n - 1$ et on a n^2. Nous retrouvons ainsi des résultats déjà rencontrés plus haut.

On remarquera l'analogie qui existe entre la formule $\frac{(a + l)\, n}{2}$ ci-dessus, et celle de l'aire d'un trapèze.

Si r est la raison d'une progression par différence, on peut toujours représenter cette progression par:

$$a \quad a+r \quad a+2r. \; . \; . \; a+(n-1)r$$

35. — Les progressions par quotient.

Si une suite de nombres :

2 6 18 54 162

par exemple, est telle qu'en divisant chacun d'eux par celui qui le précède on trouve toujours le même quotient, ces nombres forment une *progression par quotient.* Le quotient constant est la *raison* de la progression. On peut dire encore que dans une progression par quotient, le rapport d'un terme au précédent est constant, et s'appelle raison. Dans l'exemple ci-dessus, la raison est 3, le premier terme est 2 et le nombre des termes est 5.

Les nombres 1, 10, 100, 1000.... dans le système décimal, forment une progression par quotient de raison dix. Les mêmes nombres écrits dans un système de numération de base B forment une progression par quotient dont la raison est B.

La raison peut être une fraction, aussi bien qu'un nombre entier. Si elle est plus grande que 1, les termes vont en augmentant sans cesse ; la progression est alors *croissante.* Si la raison est plus petite que 1, la progression est *décroissante,* et ses termes vont en diminuant de plus en plus.

Il est intéressant de pouvoir trouver la somme des termes d'une progression par quotient. Reprenons l'exemple ci-dessus :

2 6 18 54 162

Si on multiplie un terme quelconque par la raison 3, on a le terme suivant. Si on le multiple par 3—1 ou 2, on aura donc la différence de deux termes consécutifs :

$$2(3-1)=6-2,\quad 6(3-1)=18-6,$$
$$18(3-1)=54-18,\quad 54(3-1)=162-54,$$
$$162(3-1)=486-162$$

En ajoutant, si la somme est s, on aura donc

$$s(3-1)=486-2\,;\; s=\frac{486-2}{3-1}=242$$

En général, soit

$$a \quad b \quad c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad k$$

la progression de raison q, dont on veut trouver la somme s ; si on la pousse d'un terme de plus $l=kq$, on aura

$$a(q-1)=b-a\,,\; b(q-1)=c-b\,,\ \ldots$$
$$k(q-1)=l-k,$$

et $\quad s(q-1)=l-a\,;\; s=\dfrac{l-a}{q-1}\cdot$

Si la progression est décroissante, on a, ce qui revient au même $\dfrac{a-l}{1-q}$.

Les progressions par quotient jouent un très grand rôle dans le calcul ; elles ont de nombreuses applications.

Alors même que la raison n'est pas beaucoup plus grande que 1, si le nombre des termes devient un peu élevé, les progressions conduisent à des nombres d'une grandeur énorme ; ces résultats tout d'abord frappent d'étonnement, lorsqu'on n'est pas prévenu. Nous allons en voir quelques exemples dans les nos suivants.

Il est utile de remarquer que si a est le premier terme d'une progression par quotient, q la raison, et n le nombre des termes, on peut écrire la progression :

$$a \quad aq \quad aq^2 \quad \ldots \quad aq^{n-1}.$$

36. — Les grains de blé sur l'échiquier.

On ne sait au juste quel est l'inventeur du jeu des échecs; mais il existe à ce sujet une vieille légende hindoue qui mérite d'être retenue.

Emerveillé de ce jeu nouveau, le monarque, d'après cette légende, aurait fait appeler l'inventeur, lui proposant de fixer lui-même la récompense qu'il désirait :

« Qu'on daigne simplement, répondit l'intéressé, me donner un grain de blé, qu'on placera dans la première case de mon échiquier; en mettre 2 sur la 2ème, 4 sur la 3ème, et continuer ainsi, en doublant toujours, jusqu'à la 64ème case. »

La modestie d'une telle requête frappa, dit-on, le monarque de stupeur, et il donna l'ordre de satisfaire sans retard à la demande. Mais il fut plus étonné encore quand on vint lui annoncer l'impossibilité complète d'exécuter ses ordres. Il aurait fallu environ pour cela huit récoltes annuelles produites par la surface de la terre supposée complètement ensemencée.

Le nombre des grains de blé réclamés est la somme des termes de la progression

$$1 \quad 2 \quad 2^3 \; \ldots\ldots \; 2^{63},$$

ce qui donne $2^{64} - 1$. Voici ce nombre, écrit dans le système décimal

$$18446744073709551615$$

Il a, comme on le voit, vingt chiffres. N'essayons pas de le lire. Les mots qu'on prononcerait ne diraient pas grand chose à l'esprit. Et cependant, nous en trouverons prochainement d'autres bien plus grands encore.

37. — Une maison à bon marché.

Un de nos amis, connaissant probablement l'histoire de l'inventeur du jeu des échecs, s'était fait construire une petite maisonnette à un étage. On accédait au rez-de-chaussée, un peu surélevé, par un perron de 7 marches ; et l'escalier qui conduisait ensuite à l'étage avait 19 marches.

Au bout de quelques années, il dut mettre en vente sa bicoque, d'ailleurs bien entretenue et d'agréable aspect. Au premier acquéreur qui se présenta, Dupont (il devait s'appeler Dupont) fit la proposition suivante.

« Je ne suis pas bien exigeant et je suis pressé de vendre ; vous mettrez un centime sur la première marche du perron, 2 sur la 2ème, 4 sur la 3ème et vous doublerez ainsi jusqu'au terme de l'escalier. C'est pour rien ; il n'y a que 26 marches en tout ».

« Tope là ! marché conclu » ; s'écria Lenglué, ravi d'une aussi belle aubaine (l'acquéreur s'appelait certainement Lenglué).

Et le lendemain, Lenglué, ayant offert préalablement à Dupont un superbe déjeuner, s'achemina vers le perron pour s'acquitter des $2^{26}—1$ centimes qu'il devait payer.

Jusqu'au sommet de l'escalier du perron, cela allait tout seul ; les premières marches de l'escalier étaient assez légères à gravir ; mais bientôt la bourse de Lenglué se vidait plus qu'il ne l'avait prévu.

Très obligeamment, le vendeur s'offrit à présenter le résultat du calcul, sans qu'il fût besoin de continuer l'ascension.— « Mon cher Lenglué, s'écria-t-il, vous me devez 671088 fr. 63 centimes ; mais à un ami comme vous, je ne voudrais pas demander les 63 centimes, et je vous en fais remise ».

Le nez de Lenglué, à ce discours, s'allongea fortement. Depuis cette époque, il a tenu, paraît-il, à ce qu'on apprît à ses enfants ce que c'est qu'une progression.

Il le savait assez bien lui-même, mais la leçon lui semblait avoir coûté un peu cher.

38. — Le placement du centime.

L'une des applications pratiques les plus importantes des progressions est celle qui concerne *l'intérêt composé*. Si on place 1 franc pendant un an, à 5 pour cent, il rapporte 5 centimes. Si au lieu de toucher les 5 centimes, on les joint au franc, cela fait 1 fr. 05 qu'on peut placer pendant une 2ème année, et ainsi de suite. Lorsque le nombre des années devient considérable, l'accroissement du capital par ce jeu de l'intérêt composé, est absolument fantastique.

On a, par exemple, supposé qu'au début de l'ère chrétienne, un centime ait été placé à intérêts composés au taux de 5 pour cent, et on a calculé que vers la fin du 19ème siècle, la valeur acquise serait représentée par plus d'un milliard de sphères d'or pur ayant la grosseur de la Terre.

Soit dit en passant, un tel résultat montre bien l'impossibilité de l'application absolue du jeu de l'intérêt, dans la pratique. Mais l'énormité même qu'il présente empêche qu'on se fasse une idée exacte d'une pareille somme.

Au lieu de cela, nous pouvons nous poser la question que voici : pendant combien de temps faut-il placer 1 centime à intérêts composés, au taux de 5 pour cent, de telle sorte que la valeur acquise soit de un million de francs ?

On trouve 378 ans ; si bien que si l'un de vos ancêtres, vers 1527, du temps de François Ier, avait eu l'heureuse idée de placer la valeur de un franc à votre intention, à 5 pour cent et à intérêts composés, ce franc vaudrait aujourd'hui 100 millions de francs.

Si la même opération avait été faite en l'an 59 de notre ère, au taux de 1 pour cent seulement, le même résultat serait obtenu en 1907, c'est-à-dire que le franc ainsi placé aurait aujourd'hui une valeur de 100 millions de francs (sauf les accidents qui auraient pu survenir dans l'intervalle).

39. — Le dîner cérémonieux.

Un beau soir, douze personnes avaient pris rendez-vous pour dîner en commun. C'étaient des gens attachant une grosse importance à l'étiquette; or, les places n'ayant pas été marquées à l'avance, une discussion courtoise s'engagea au moment de s'asseoir à table, sans d'ailleurs aboutir à aucun résultat. Quelqu'un, pour sortir d'embarras, proposa d'essayer successivement toutes les manières possibles de résoudre la question : il n'y aurait plus ensuite qu'à choisir la disposition qui semblerait la plus heureuse. On essaya, en effet, pendant quelques minutes; mais on s'embrouillait, et les choses ne semblaient pas encore s'arranger toutes seules. Heureusement, parmi les convives, il s'en trouvait un, professeur au collège de la ville, ayant quelques notions mathématiques. — « Mes bons amis, dit-il, le potage commence à refroidir. Tirons nos places au sort, ce sera plus tôt fait ». On suivit ce sage conseil, et le repas s'acheva au milieu de la plus franche cordialité. Au dessert, reprenant la parole : « Savez-vous, demanda le professeur, combien il nous aurait fallu de temps pour épuiser toutes les dispositions possibles que nous pouvions former autour de cette table, en mettant seulement une seconde pour passer d'une disposition à une autre? — Et, comme chacun gardait le silence : « En continuant ce petit jeu, jour et nuit, sans nous arrêter un seul instant, nous y aurions mis plus de 15 ans et 2 mois, même en ne nous occupant pas de savoir combien il se présentera d'années bissextiles. Vous voyez que si le rôti menaçait de se dessécher, nous étions sûrs de périr tous de faim, d'épuisement et de privation de sommeil. Soyons donc cérémonieux, si le cœur nous en dit, mais sans excès ».

Et c'était la vérité; le nombre exact des manières différentes dont 12 personnes peuvent prendre place à une table de 12 couverts est exactement 479001600; plus de 479 millions, vous avez bien lu.

Ce résultat est fait pour surprendre, quand on pense que pour 2 convives, il n'aurait fallu que 2 secondes; et que pour 4 convives, l'essai eût été achevé en moins d'une demi-minute.

Les grands nombres que nous voyons apparaître ici sont dus à des permutations, et le décompte est facile à faire.

Quand on a plusieurs objets différents, qu'on veut ranger à des places différentes marquées d'avance, l'une quelconque des dispositions adoptées est une *permutation* de ces objets.

S'il s'agit de deux objets différents qu'on appelle a, b, et de deux places différentes, les deux seules permutations possibles sont $a\,b$ et $b\,a$.

Pour former les permutations de trois objets, a, b, c, nous pouvons prendre la permutation $a\,b$ et y adjoindre c à trois places différentes; soit après b, soit entre a et b, soit avant a.

La permutation $b\,a$ en donnera trois aussi en y adjoignant c; en sorte que nous aurons le tableau général des permutations de a, b, c, en écrivant :

$$\begin{array}{ccc} a\,b\,c & \quad & b\,a\,c \\ a\,c\,b & & b\,c\,a \\ c\,a\,b & & c\,b\,a \end{array}$$

Cela donne 2×3 ou 6 permutations.

Si on prend une quelconque de ces permutations, $a\,b\,c$ par exemple, et si on y adjoint une 4ème lettre, d, on aura ainsi 4 permutations

$$a\,b\,c\,d \qquad a\,b\,d\,c \qquad a\,d\,b\,c \qquad d\,a\,b\,c$$

et chaque permutation de 3 lettres en fournissant ainsi 4 de 4 lettres, le nombre des permutations de 4 lettres sera 6×4 ou $2.\ 3.\ 4 = 24$.

En continuant ainsi, on voit que le nombre de permutations de 5 lettres serait 2.3.4.5 ; et en général, celui des permutations de n lettres sera $2.3.4\ldots\ldots n$. On le représente souvent par $n!$

On voit, par les résultats ci-dessous, avec quelle rapidité

croissent ces nombres $n\,!$ de permutations, lorsque n s'accroît.

n	$n\,!$
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600

Les permutations ont une grande importance en mathématiques. Elles s'appliquent en outre à divers jeux ou amusements, tels que les anagrammes. Des études très nombreuses, souvent fort savantes, ont été publiées sur les permutations. Nous n'avons pas à nous en occuper ici; mais il est bon de signaler l'idée géniale qu'a eue Ed. Lucas de représenter graphiquement, par un dessin, les permutations de plusieurs objets. C'est ce qu'il a nommé les *permutations figurées*. Pour les faire comprendre, imaginons qu'on forme sur un quadrillage un carré de n lignes, de n cases chacune; et nous bornant aux permutations de 4 objets, faisons $n = 4$. Nous aurons un carré de 16 cases. Si nous remplaçons nos 4 objets a, b, c, d par les 4 nombres 1, 2, 3, 4, une permutation quelconque $c\ b\ d\ a$ par exemple, s'écrira 3 2 4 1. Prenant alors la 1ère colonne du carré, nous marquons la 3ème case, et nous l'ombrons; de même pour la 2ème case de la 2ème colonne, pour la 4ème de la 3ème colonne, et pour la 1ère de la 4ème colonne. Les quatre cases ombrées figurent ainsi la permutation $c\ b\ d\ a$.

La figure 73 nous montre les 24 permutations de 4 objets. Pour en faciliter la compréhension et la lecture, nous reproduisons au-dessous le tableau des permutations correspondantes, avec la même disposition.

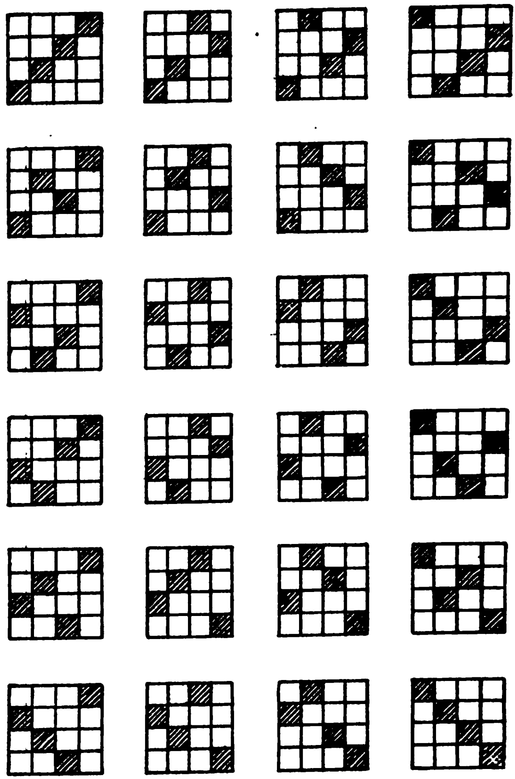


Fig. 73.

abcd	*abdc*	*adbc*	*dabc*
acbd	*acdb*	*adcb*	*dacb*
cabd	*cadb*	*cdab*	*dcab*
bacd	*badc*	*bdac*	*dbac*
bcad	*bcda*	*bdca*	*dbca*
cbad	*cbda*	*cdba*	*dcba*

Si l'on considère un quelconque des carrés de la figure 73 comme un échiquier, les cases ombrées représentent les positions de tours qui ne se trouvent pas en prise les unes des autres; et cela s'étend à tous les carrés analogues. Il s'ensuit que sur un échiquier ordinaire, de 64 cases, on peut placer, de 40320 manières différentes, huit tours, de telle sorte qu'elles ne soient pas en prise réciproque. Sur un damier de 100 cases, on pourrait placer dix tours, dans les mêmes conditions, de 3628800 manières différentes. Consultez le tableau ci-dessus (p. 117) pour les nombres que nous indiquons. Voilà certainement des questions dont on ne viendrait pas aisément à bout sans le secours des permutations, et qui deviennent, avec ce secours, tout à fait faciles.

Vous pouvez vous demander aussi de combien de manières différentes on peut ranger les cartes d'un jeu de piquet; c'est 32 ! ou celles d'un jeu de whist; c'est 52 ! mais je ne vous engage pas à essayer d'écrire ces nombres dans le système décimal. Proposez-vous plutôt de chercher le temps qu'il vous faudrait pour réaliser toutes ces dispositions, en consacrant une seconde à chacune d'elles. C'est un plaisir que je laisse à mes lecteurs, ou plutôt à leurs élèves. Mais qu'ils n'essaient pas non plus d'écrire ces nombres, même évalués en siècles; cela ne contribuerait guère à la formation de l'esprit.

40. — Un assez grand nombre.

Nous venons, par les progressions d'un côté, par les permutations de l'autre, de nous élever à d'assez grandes hauteurs sur l'échelle des nombres.

Dans l'espoir de revenir à des limites plus raisonnables et d'échapper ainsi au vertige, demandez à quelqu'un de vous écrire avec trois 9, le plus grand nombre possible. Le plus souvent, la réponse sera

$$999$$

nombre modeste en effet, honnête et modéré, qui n'a pas la prétention de vous mettre la cervelle en ébullition.

Seulement, si par malchance votre interlocuteur est un mathématicien consciencieux, désireux de répondre à votre question dans les termes où vous l'avez posée, une toute petite modification d'écriture se produira, et vous lirez

$$9^{9^9}$$

Cela veut dire qu'il faut élever 9 à une puissance marquée par le nombre 9^9. Ce dernier est facile à obtenir en quelques minutes. Votre élève vous le donnera certainement sans aucune hésitation, si vous ne voulez pas le calculer vous-même. C'est

387 420 489

et ce résultat est fort intéressant, car vous savez, grâce à lui, qu'il ne vous reste plus qu'à effectuer 387420488 multiplications, pour avoir dans le système décimal, le nombre désiré. Ce sont des multiplications très simples, n'ayant jamais que 9 pour multiplicateur ; mais le nombre en est peut-être assez grand pour vous inspirer quelque hésitation.

Décidément, je ne saurais vous encourager à entreprendre cette tâche. Laissez-moi seulement vous dire — et répétez-le à votre élève, qui vérifiera le fait plus tard — que le nombre 9^{9^9}, s'il était écrit en numération décimale aurait

369693100 chiffres.

Pour l'écrire sur une seule bande de papier, en supposant que chaque chiffre occupe une longueur de 4 millimètres, il suffirait que cette bande eût une longueur de

1478 kilomètres 772 mètres 40 centimètres.

C'est un peu plus de deux fois la distance de Paris à Avignon par le chemin de fer.

Dans les mêmes conditions, pour écrire $10^{10^{10}}$, il faudrait une bande de papier ayant pour longueur le tour entier de la Terre [1].

Le temps matériel nécessaire pour écrire le nombre 9^{9^9}, en mettant une seconde par chiffre et en travaillant 10 heures par jour, n'excéderait guère 28 ans et 48 jours, à la condition de supprimer tous dimanches et toutes fêtes, c'est-à-dire de ne prendre aucun jour de repos.

Pour plus de renseignements, je peux vous affirmer encore que le premier chiffre du nombre que nous cherchons est un 4, et que le dernier est un 9. Il ne nous en reste donc plus à trouver que 369693098. Vous estimerez peut-être que la simplification est mince; c'est un avis que je partage. En revanche, je l'espère, vous conviendrez que le titre de ce n°, « Un assez grand nombre », est vraiment justifié.

Une dernière remarque assez curieuse, c'est que 1^{1^1} est simplement 1, que $2^{2^2} = 16$, et que 3^{3^3} est un nombre de 13 chiffres

7625597484987 [2]

[1] Cette remarque a été faite par M. Ch.-Ed. Guillaume, dans un très intéressant article de la *Revue générale des sciences* (30 octobre 1906).

[2] Malgré les explications données, plusieurs lecteurs ont fait une confusion sur la signification de 3^{3^3}, et quelques-uns m'ont écrit qu'ils trouvaient pour résultat 19683, et non pas un nombre de 13 chiffres. Cela provient d'une fausse interprétation du symbole a^{b^c}, dans lequel on peut voir $\left(a^b\right)^c$ ou $a^{\left(b^c\right)}$. Cette dernière interprétation est la seule raisonnable; car $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$. Il serait peu logique d'employer l'écriture a^{b^c} pour représenter l'opération plus simple a^{bc}. Dès lors 9^{9^9} ne peut signifier que $9^{\left(9^9\right)}$ et 3^{3^3} veut dire 3^{27} et non pas 27^3.

41. — Compas et rapporteur.

Dans les exercices de dessin, que nous avons dû poursuivre sans discontinuer, peut-être s'est-il déjà présenté des cercles ou des fragments de lignes circulaires qu'il nous a suffi de tracer à peu près à main levée.

Pour des tracés dans lesquels nous voulons avoir une certaine précision, le moment est venu d'accoutumer l'enfant à l'usage du compas. On l'exercera au tracé d'arcs de cercles, puis de cercles tout entiers, au crayon d'abord, à l'encre ensuite. On apprendra, suivant des procédés indiqués dans tous les traités classiques, à mener ainsi des perpendiculaires à des droites, à construire des triangles et diverses autres figures, etc.

Ces constructions, quand on veut les rendre un peu précises, doivent en outre comporter l'emploi de l'instrument appelé *rapporteur,* lequel est très simple aussi, et rend des services à peu près équivalents sous les diverses formes qu'il affecte; demi-circulaire ou rectangulaire, métallique ou en corne, etc.

Quant au mode de division du rapporteur, il faudra donner la préférence à la division en *grades,* où l'angle droit est divisé en 100 grades, et ensuite le grade en dixièmes, centièmes, etc. Ce mode de mesure des angles avait été institué en même temps que le système métrique. On l'a abandonné pour l'ancien système des degrés, minutes, etc. Aujourd'hui, et avec raison, on y revient, même dans certains programmes officiels; et plusieurs services publics importants ont constamment employé cette division en grades. Il convient donc de la rendre, dès le début, familière aux enfants, et de leur montrer sous le nom de 50 grades (plutôt que 45 degrés), la moitié d'un angle droit.

Les constructions à faire exécuter doivent être très simples, souvent laissées à l'initiative de l'enfant. Mais ce qui

est très important, c'est de lui faire exécuter une même construction avec des échelles différentes. Il prendra de lui-même, ainsi, la notion de figures ayant même forme, avec des grandeurs différentes, c'est-à-dire des figures semblables, en dehors de toute définition doctrinale.

L'enfant s'apercevra bien vite que l'échelle choisie pour faire une construction n'amène aucun changement dans les angles, qu'au contraire, s'il adopte une échelle double, ou triple, toutes les longueurs correspondantes deviennent en même temps doubles, ou triples. Bref, sans faire aucune étude géométrique quant à présent, il prendra, par l'expérience, la connaissance, accompagnée de certitude, de beaucoup de vérités dont les démonstrations seront plus tard d'autant plus facilement assimilables.

Il est certaines autres propriétés utiles à connaître, certaines dénominations utiles à retenir, pour lesquelles il faudra provisoirement demander à votre élève de vous croire sur parole, et de vous faire crédit. Ceci va faire l'objet des numéros suivants.

42. — Le cercle.

Le *Cercle* est la figure ronde (fig. 74) qu'on trace avec un compas, l'une des pointes restant fixe. Le point O où est fixée cette pointe est le *centre :* la distance du centre à un point quelconque M du cercle est le *rayon*. Le double du rayon est le *diamètre* : toute droite MM′ passant par le centre est un diamètre; la longueur du segment MM′ est double du rayon. Quand on prend deux points A, B sur un cercle, la portion du cercle limitée à A et B, soit dans un sens, soit dans l'autre, s'appelle un *arc de cercle*. Le segment de droite

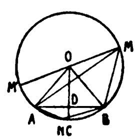


Fig. 74.

AB est une *corde* qui *sous-tend* les deux arcs AB. La portion du plan comprise entre la corde et l'arc s'appelle un *segment de cercle.* Quand on joint le point O à deux points A, B du cercle, l'angle AOB est nommé un *angle au centre.* L'angle AMB, dont les côtés passent par A, B, et dont le sommet est en M sur le cercle, est un *angle inscrit* dans le segment AMB; cet angle est la moitié de l'angle AOB. Quand on joint le centre au milieu C de l'arc AB, la droite OC est perpendiculaire à la corde AC, et elle la coupe en D par moitié.

Si on prend un point N sur le cercle, en dessous de la corde AB sur la figure, la somme des deux angles AMB, ANB est égale à deux angles droits.

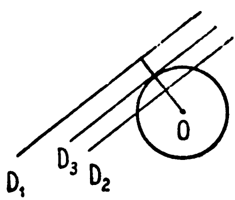


Fig. 75.

Quand on considère (fig. 75) un cercle et une droite, celle-ci peut (D_1) être extérieure au cercle ; ou (D_2) le couper en deux points ; on dit alors qu'elle est *sécante ;* ou enfin (D_3) toucher le cercle en un seul point, auquel cas elle est *tangente* au cercle. La distance du centre à la droite est

plus grande que le rayon pour une droite extérieure
» petite » » » » sécante
égale au rayon » » tangente.

Le point commun à la tangente et au cercle est le *point de contact.* La tangente est perpendiculaire au rayon qui aboutit au point de contact.

Dans un cercle quelconque, on a la notion de la longueur; ce serait par exemple celle d'un fil très fin qui entourerait le rond tout entier. Bien que cette idée générale manque de rigueur, elle fait image et parle à l'esprit; elle se précisera plus tard. La longueur du cercle dont nous venons de parler, s'appelle *circonférence.*

Si (fig. 76) on considère deux cercles quelconques O, O′, le rapport des circonférences est égal au rapport des diamètres. Cela veut dire aussi que le rapport de la longueur de la circonférence à celle du diamètre est la même dans chacun des deux cercles, et par suite dans tout cercle. Ce rapport de la circonférence au diamètre, qu'on ne peut exprimer exactement par des fractions quelconques, est plus grand que 3,14; il est plus petit que 3,1416; on le désigne par la lettre grecque π. Pour beaucoup d'usages ordinaires, 3,14 est une valeur suffisamment approchée; et 3,1416 convient à presque tous les cas où l'on a besoin d'une plus grande précision.

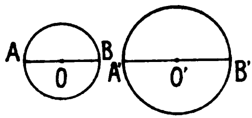


Fig. 76.

Si C est la longueur de la circonférence, et si $D = 2R$ est le diamètre, R étant le rayon, le rapport $\frac{C}{D}$ est donc π. Cela veut dire que $C = \pi D = 2\pi R$. Dans la pratique courante, $C = 3,14 \times D = 6,28 \times R$.

Cela permet de connaître facilement la circonférence d'un objet circulaire quelconque quand on connaîtra le rayon, ou le diamètre; et aussi de trouver le diamètre, par exemple, d'une tour ronde, d'un tronc d'arbre, d'une colonne, quand on peut en mesurer le tour avec un ruban divisé ou de toute autre façon. Poussez le plus possible les enfants à ces exercices sur des objets réels; et lorsqu'on peut *à la fois* mesurer la circonférence et le diamètre, ne manquez pas d'en profiter pour faire vérifier la valeur approchée de π dont on a fait usage.

43. — L'aire du cercle.

De même que nous avons l'intuition de la longueur de la circonférence du cercle, de même aussi nous sentons que

la portion du plan comprise à l'intérieur de la ligne a une certaine étendue, une *aire* qui doit pouvoir être mesurée. On établit que cette aire est obtenue en multipliant la longueur de la circonférence par la moitié du rayon. Et, comme nous avons vu que $C = 2\pi R$, il s'ensuit que l'aire $S = \pi R^2$. ou encore que $S = \frac{\pi}{4} D^2$. Il en résulte aussi que les aires de deux cercles ont entre elles un rapport qui est le même que celui des carrés des rayons, ou des diamètres.

Ici encore, des exemples pratiques, aussi variés que possible, pourront servir de thèmes à des exercices sur ces questions d'aires; massifs circulaires dans un jardin; bassins dans les jardins publics, manèges dont on veut sabler le sol, peinture d'une table ronde; évaluation de couronnes circulaires par différences entre deux cercles, etc., etc.

44. — Lunules et rosaces.

Dans la plupart des traités de dessin, on trouvera des modèles de figures formées d'éléments circulaires, pouvant être tracées à l'aide du compas, et constituant d'intéressants exercices.

Uniquement à titre de spécimen, nous indiquerons ici un petit nombre seulement de ces figures, dont quelques-unes sont classiques.

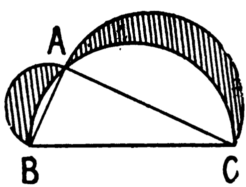


Fig. 77.

Si l'on dessine (fig. 77) une demi-circonférence ayant pour diamètre BC, et si l'on prend un point A quelconque sur cette ligne, le triangle ABC est toujours rectangle, l'angle A étant droit. Maintenant, décrivons deux autres demi-circonférences sur AB et sur

AC comme diamètres. Nous aurons ainsi deux sortes de croissants (ombrés sur la figure). Ce qui fait l'intérêt de cette figure, c'est que la somme des aires des deux croissants, ou *lunules*, est justement égale à l'aire du triangle ABC. Cette propriété était connue dès l'antiquité grecque, et la construction que nous venons d'indiquer est devenue classique sous le nom de *lunules d'Hippocrate*[1].

Une autre construction intéressante est celle qu'indique la figure 78. Un cercle ayant pour diamètre AB, on a partagé ce diamètre en cinq parties égales par les points C, D, E, F. Sur AC, AD, AE, AF, comme diamètres, on trace des demi-

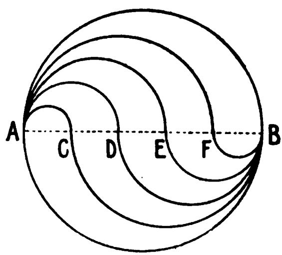


Fig. 78.

circonférences au-dessus ; puis sur CB, DB, EB, FB, des demi-circonférences au-dessous. Par l'ensemble de ces lignes circulaires, le cercle est partagé en cinq parties qui ont même aire. Au lieu de cinq, on pourrait prendre un autre nombre n quelconque. Il suffirait de partager le diamètre AB en n parties égales.

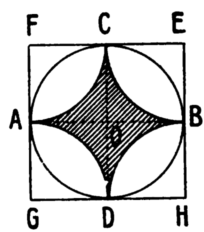


Fig. 79.

Dans un cercle (fig. 79) prenons deux diamètres perpendiculaires entre eux AB, CD. Ayant formé le carré OBEC, traçons de B en C un

[1] Hippocrate de Chio, géomètre grec (Vème siècle avant J.-C.).

quart de cercle dont E est le centre ; traçons de même trois autres quarts de cercles CA, AD, DB ; et l'ensemble (partie ombrée) forme une sorte d'étoile à quatre pointes. L'aire de cette étoile est $(4 - \pi)\ R^2$, soit à peu près $0.86 \times R^2$.

Si (fig. 80) nous prenons encore deux diamètres perpendiculaires l'un sur l'autre AB, CD, et si nous traçons les demi-circonférences ayant pour diamètres BC, CA, AD, DB, nous obtenons une rosace à quatre feuilles. L'aire de cette rosace est $(\pi - 2)\ R^2$ ou, à peu près, $1,14 \times R^2$, le rayon étant toujours représenté par R.

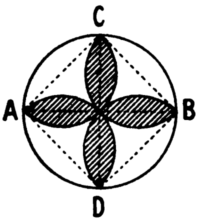


Fig. 80.

En ouvrant le compas d'une longueur égale au rayon, si on porte cette longueur (fig. 81) successivement sur le cercle en B, C.... on retombe exactement sur le point A après la 6ème opération, en sorte qu'on a les points A, B, C, D, E, F. Si de B, D, F comme centres, avec le rayon R, on décrit des arcs de cercles AC, CE, EA, qui passent tous par le centre, on a une rosace à trois feuilles.

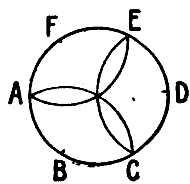


Fig. 81.

En traçant (fig. 82) avec la même construction les six arcs de cercle de centres A, B, C, D, E, F, on obtient une rosace à six feuilles.

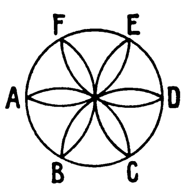


Fig. 82.

Nous bornons là ces indications, fournies uniquement à titre d'exemples. En réalité, on devra les varier, et pousser l'enfant à imaginer spontanément des formes nouvelles. Dès qu'il aura acquis un peu d'habileté dans le maniement du compas et des divers instruments élémentaires de dessin, il prendra goût à ces cons-

tructions et y mettra de lui-même tous ses soins et toute son attention [1].

45. — Quelques volumes.

S'il est important de déterminer les aires des surfaces, il ne l'est pas moins, dans la pratique, de déterminer les volumes des corps. Il faut pour cela une *unité de volume,* de même que pour les longueurs il fallait une unité de longueur, pour les aires, une unité d'aire. Cette unité de volume, c'est invariablement le volume d'un cube qui aurait pour côté l'unité de longueur.

Partant de là, pour un certain nombre de corps ayant des formes régulières, on a trouvé des moyens très simples pour obtenir les volumes.

Nous allons les résumer tout à l'heure, de façon à ce qu'on n'ait pas besoin d'aller faire des recherches pour résoudre certaines questions usuelles. Auparavant, rappelons les corps que nous avons précédemment définis, et indiquons-en trois autres, qu'on rencontre fréquemment dans les applications courantes.

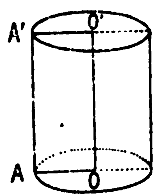


Fig. 83.

Nous avons vu ce que c'est qu'un *cube,* un *parallélépipède,* un *prisme,* une *pyramide.*

Dans tous ces corps, on ne voit que des lignes droites et des plans ; on les appelle en général des *polyèdres.* Dans les trois autres dont nous allons parler maintenant, il n'en est plus ainsi.

Imaginons (fig. 83) qu'un rectangle AOO'A' tourne au-

[1] Pour tout ce qui concerne les exercices de dessin géométrique et aussi pour commencer l'étude de la Géométrie, qui doit suivre l'initiation, nous ne saurions assez recommander l'ouvrage de M. C. Bourlet, *Cours abrégé de Géométrie ; Géométrie plane;* Paris, Hachette, 1906. On pourrait aller jusqu'à dire

tour de son côté OO′ ; il engendre ainsi un corps qu'on appelle un *cylindre* droit. Une boîte à chapeau ou à manchon, un verre de lampe, l'intérieur d'un litre en métal, ou d'un décalitre en bois, nous montrent ce qu'est la forme générale d'un cylindre. Les deux côtés OA, O′A′ du rectangle décrivent deux cercles pareils de rayons OA = O′A′ et qu'on appelle les *bases* du cylindre ; OO′, qui n'a pas bougé, représente la distance des plans des deux bases ; c'est la *hauteur* du cylindre.

Soit (fig. 84) un triangle rectangle AOS, dans lequel O est un angle droit, et supposons que ce triangle tourne autour de SO ; il engendrera ainsi un corps qu'on appelle un *cône* droit. Un pain de sucre, un entonnoir, une carotte affectent la forme générale d'un cône. Le côté OA du triangle décrit un cercle qu'on appelle la *base* du cône. Le point S, qui n'a pas bougé, est le *sommet*. La longueur SO, distance de S au plan de la base, est la *hauteur* du cône.

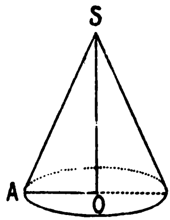


Fig. 84.

Enfin si un cercle tourne autour d'un diamètre, le corps qu'il engendre s'appelle une *sphère*. La forme d'une sphère est celle d'une boule ronde. Le centre du cercle est le *centre* de la sphère, et le rayon du cercle est le *rayon* de la sphère. Tout plan qui passe par le centre coupe la sphère suivant un cercle qui a même rayon qu'elle et qu'on appelle un *grand cercle*. Toute droite qui passe par le centre coupe la sphère

que l'auteur a atteint à la perfection pédagogique, si la perfection était humainement possible. En tous cas, il se passera bien du temps avant qu'on fasse mieux en cette matière. Il est seulement à regretter que les programmes aient empêché M. Bourlet de mener de front l'étude de la Géométrie de l'espace avec celle de la Géométrie plane, au moins en ce qui concerne les translations rectilignes.

en deux points également distants du centre, et le segment déterminé par ces deux points est un *diamètre*, dont la longueur est double de celle du rayon.

Remarquons qu'un cylindre est déterminé quand on connaît le rayon de sa base et sa hauteur, qu'il en est de même pour un cône, et qu'une sphère est déterminée quand on connaît son rayon.

Tout ceci bien établi, nous aurons le volume :

d'un cube, en multipliant deux fois par elle-même la longueur de son côté. Si a est le nombre qui mesure cette longueur, cela nous donne $a \times a \times a$ ou a^3 ; — Formule : $V = a^3$;

d'un parallélépipède, en multipliant l'aire de la base par la hauteur; l'aire B de la base étant elle-même un produit $a\,b$, si a est un côté du parallélogramme de base ayant b pour hauteur, on devra former le produit de $a\,b$ par la hauteur h du parallélépipède : formule $V = Bh = a\,b\,h$;

d'un prisme, dont le parallélépipède n'est qu'un cas particulier, en multipliant l'aire de la base par la hauteur; — formule $V = B\,h$;

d'une pyramide, en prenant le tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur; cette détermination du volume de la pyramide a été donnée pour la première fois par Archimède[1]; formule $V = \frac{Bh}{3}$;

d'un cylindre, en multipliant l'aire de la base par la hauteur. Comme la base est un cercle, de rayon r, si la hauteur est h il s'ensuit pour la formule $V = \pi\, r^2\, h$,

d'un cône, en prenant le tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur ; il s'ensuit pour la formule $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$;

[1] ARCHIMÈDE, illustre géomètre, né à Syracuse (287-212 avant J.-C.).

d'une sphère, en multipliant le cube du rayon par les $\frac{4}{3}$ de π ; — formule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

On établit aussi que l'aire d'une sphère est égale à 4 fois celle d'un grand cercle ou $4\pi r^2$. On peut par conséquent dire encore que le volume d'une sphère est égal à son aire multipliée par le tiers du rayon.

Enfin le volume d'une sphère peut aussi se déterminer par la formule $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, et son aire par πd^2, si on appelle d le diamètre.

Tous ces résultats seront obtenus plus tard. On ne les communique actuellement à l'enfant que pour lui rendre possibles certains exercices pratiques. Mais ne lui demandez pas de surcharger sa mémoire de toutes ces formules.

Mettez-les de nouveau sous ses yeux chaque fois qu'il en aura besoin. Si par l'usage elles se fixent dans son esprit, tant mieux. Sinon, n'en ayez cure.

46. — Les graphiques ; algèbre sans calcul.

Dans un grand nombre de revues ou de journaux, on trouve aujourd'hui des graphiques, figures dont on peut tirer un grand parti pour l'éducation mathématique première des enfants. Il faut leur faire comprendre ce que ces figures signifient, et les pousser ensuite à en construire eux-mêmes d'analogues.

Le plus habituellement, les graphiques dont il s'agit représentent les variations d'observations météorologiques, par exemple hauteur barométrique, température, ou celles des cours à la Bourse d'une valeur déterminée, pendant une certaine période de temps. Il y aura lieu de rappeler que les

graphiques servent aussi, dans l'exploitation des chemins de fer, à représenter la marche des trains, et que c'est même le seul moyen vraiment pratique de s'en rendre compte.

Mais il importera surtout de faire remarquer que les mêmes procédés peuvent permettre de représenter les variations de n'importe quelle espèce de grandeur mesurable, qui dépend d'une autre grandeur, que cette dernière soit un temps ou autre chose.

Par exemple, quand on suspend un poids à un fil de caoutchouc, ce fil s'allonge. On pourra faire un graphique qui permette de savoir la longueur du fil quand on connaît le poids. Quand on presse un gaz, son volume diminue ; un graphique permettra de savoir quel est le volume du gaz quand on connaît la pression. Quand on chauffe de la vapeur d'eau, sa pression augmente ; un graphique permettra de connaître la pression, si on sait quelle est la température.

Dans ces divers exemples, la longueur du fil dépend du

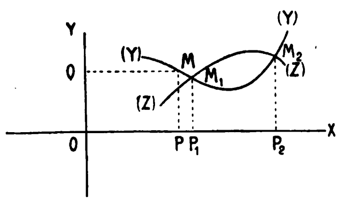


Fig. 85.

poids suspendu ; on dit que c'est une *fonction* de ce poids ; le volume du gaz dépend de la pression ; c'est une fonction de la pression ; la pression de la vapeur d'eau, dépendant de la température, est une fonction de la température. Dans les exemples précédents, la hauteur du baromètre, le chemin fait par un train, etc., dépendaient de l'époque, c'est-à-dire du temps écoulé depuis une certaine époque fixe. C'étaient des fonctions du temps.

Cette idée de fonction est en soi tout à fait naturelle, simple, et un enfant la saisira aisément si on met quelque soin

à la lui présenter, en employant le plus possible des exemples. Quand une grandeur Y dépend d'une grandeur X, et quand elles sont l'une et l'autre mesurables, la première est une fonction de la seconde.

Les graphiques ont pour but de représenter aux yeux les fonctions, par des figures dont la construction repose invariablement sur le même principe. Voici comment.

Prenons, sur un papier quadrillé (fig. 85) deux lignes perpendiculaires OX, OY. Pour représenter une valeur particulière x de la quantité variable X, nous porterons sur OX une longueur OP qui soit mesurée par le même nombre que x, en prenant une certaine unité de longueur. A la valeur x, correspond une valeur particulière y de Y ; nous la représenterons de même en OQ, sur OY, en prenant telle unité de longueur que nous voudrons ; cela fait, nous menons les droites PM, parallèle à OY, et QM, parallèle à OX, qui viennent se couper en un point M ; ce point représente l'ensemble des deux valeurs correspondantes x, y. En construisant ainsi des points, tels que M, autant qu'on voudra, et les joignant par un trait continu, on aura le graphique peignant aux yeux les variations de la fonction Y.

Si la quantité X comporte des valeurs négatives, et que x soit une de celles-là, le point P au lieu d'être à droite de O se trouvera à gauche, sur OX.

Si la quantité Y comporte des valeurs négatives et que y soit une de celles-là, le point Q au lieu d'être au-dessus de O se trouvera au-dessous, sur OY.

Pour deux valeurs quelconques x, y qui se correspondent, c'est-à-dire pour l'ensemble de deux points P, Q, on n'a jamais qu'un seul point M.

Si les points M qu'on obtient ne sont pas très rapprochés les uns des autres, on peut les joindre par des segments de droites ; on n'essaie même pas alors de figurer par une courbe la fonction Y ; mais les points qui montrent ce tracé en segments de droites donnent quand même une idée générale de la manière dont cette fonction varie.

En Algèbre, — on le verra plus tard — on ne fait guère autre chose qu'étudier des fonctions qui peuvent se déterminer par le calcul et qu'on appelle pour cette raison des *fonctions algébriques :* et le problème fondamental de l'Algèbre consiste à trouver les valeurs de X, telles que deux fonctions Y, Z de X, deviennent égales entre elles. On voit (fig. 85) que si l'on a tracé les deux graphiques (Y), (Z) des fonctions Y, Z, ces lignes se coupent en des points M_1, M_2 ; en menant M_1P_1. M_2P_2, parallèles, à OY, jusqu'à OX, les longueurs OP_1, OP_2 donneront donc, avec l'unité adoptée pour mesurer les longueurs sur OX, les deux nombres x_1, x_2 qu'il s'agissait de trouver.

C'est en ce sens qu'on peut dire que les graphiques permettent de faire de l'Algèbre sans calcul, et même quelque chose de plus, puisque des graphiques ont pu être établis pour des fonctions qui ne sont pas algébriques. Il est juste d'ajouter que tous les résultats qu'on obtient ainsi ne sont obtenus que par à peu près, qu'ils ne sont pas rigoureux. Mais dans la pratique, dans un très grand nombre de cas, si les graphiques sont faits avec soin, cela peut suffire. Il y a donc beaucoup de questions auxquelles s'appliquent avantageusement ces tracés, qui ont en outre l'avantage de parler à l'esprit par l'intermédiaire des yeux, de figurer les choses elles-mêmes. C'est là une qualité précieuse en matière de pédagogie.

Dans les nos suivants, quelques exemples achèveront d'éclaircir la construction et l'emploi des graphiques. Leur application la plus naturelle semble se trouver dans le type de problèmes connus sous le nom de *problèmes des courriers:* c'est donc à ceux-là que nous nous attacherons surtout, sous diverses formes.

47. — Les deux marcheurs.

Voici, sous l'une de ses formes les plus simples, en quoi consiste le problème des courriers : un marcheur part à une heure donnée, d'un endroit donné, avec une certaine vitesse connue. Quelque temps après, un second marcheur, allant à une vitesse plus grande, part dans la même direction, suivant la même route. Quand rencontrera-t-il le premier, et à quelle distance de son point de départ?

Pour résoudre cette question, et les autres de même nature, il faut voir comment nous établirons le graphique d'un marcheur. Pour cela, sur un papier quadrillé (fig. 86) prenons nos deux droites perpendiculaires OT (sur laquelle nous marquerons les temps) et OY (sur laquelle nous marquerons les distances). Le point O correspondant à midi, par exemple, prenons 2 divisions pour représenter une heure, et marquons sur OT, 1^h, 2^h, 3^h.... De même sur OY, à partir de O, prenons une demi-division pour représenter un kilomètre, et marquons 2^k, 4^k, 6^k,... Si un marcheur part à 2 h. et demie avec une vitesse de 6 kilomètres à l'heure, on voit d'abord que le graphique contiendra le point A sur OT ; puis, qu'à 3 h. et demie il aura fait

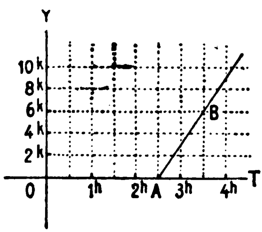


Fig. 86.

6 kilomètres ce qui donne le point B ; enfin, comme le marcheur continue à faire constamment 6 kilomètres à l'heure régulièrement, la droite AB sera le graphique cherché. On voit par exemple qu'à 4^h il sera rendu à 9^k de son point de départ, et que le simple tracé de la droite AB nous montre à quelle distance se trouve le marcheur à

une heure déterminée, et quelle heure il est lorsque le marcheur a parcouru une distance donnée.

Revenons maintenant à notre question, et précisons-la en disant que le premier marcheur a une vitesse de 4 kilomètres à l'heure, et que le 2ème marcheur part 1 h. après lui et a une vitesse de 6 kilomètres à l'heure. Prenons (fig. 87) les mêmes unités que tout à l'heure, et comptons le temps à partir du départ du premier marcheur. Alors la droite OB_1 est le graphique du 1er marcheur, et A_2B_2 est le graphique du 2ème. Elles se coupent en M, qui correspond à 3h

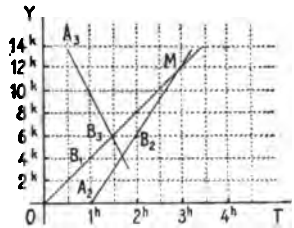


Fig. 87.

et à 12 kilomètres. La rencontre aura donc lieu à 12 kilomètres du point de départ, et 3h après le départ du 1er marcheur.

On peut maintenant compléter le problème, en le compliquant un peu. D'une localité à 14 kilomètres du point de départ, une voiture se met en route, allant au-devant des deux voyageurs, c'est-à-dire en sens contraire. Elle part une demi-heure après le 1er et elle fait 8kil à l'heure. Où rencontrera-t-elle chacun des deux et à quelles heures? A_3B_3 est le graphique de la voiture. Cette droite coupe OB_1 au point B_3 qui correspond à 1h et demie et à 6kil; cela donne la rencontre avec le 1er marcheur. Le point de rencontre avec A_2B_2 correspond à environ $1^h\frac{3}{4}$, plutôt un peu moins, et à $4^{kil}\frac{1}{4}$, plutôt un peu plus.

En traitant la question par le calcul on trouverait à peu près 1 h 43 minutes pour le temps et 4 kil 286 mètres pour la distance. On voit, malgré les petites dimensions de notre figure 87, combien elle nous donne, à simple vue, des résultats s'approchant de la rigueur, et satisfaisants dans la pratique.

48. — De Paris à Marseille.

Dans les marches de trains entre Paris et Marseille, nous avons, au début de l'année 1905, fait choix du rapide 1, de Paris à Marseille, et du rapide 16, de Marseille à Paris, tous

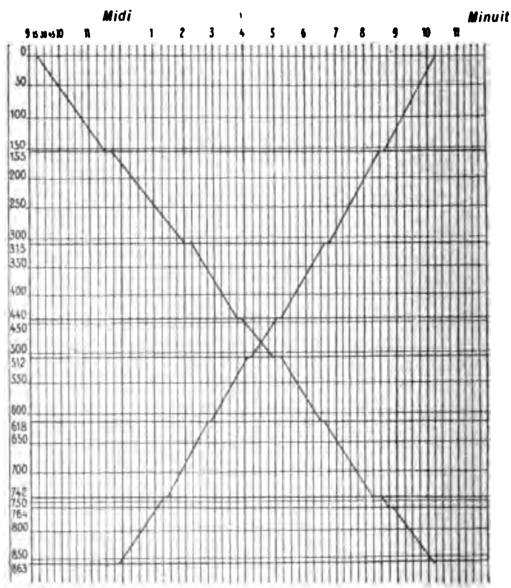


Fig. 88.

deux de jour, pour en donner les graphiques sur une même figure (fig. 88). Pour qu'on puisse faire le rapprochement des diverses circonstances de la marche de ces trains avec la réalité des faits, malgré les dimensions très restreintes de la figure, nous donnons ci-dessous les tableaux des heures précises qui définissent ces marches.

Rapide 1.

	Arr.	Dép.
Paris		$9^{h}20$ m.
Laroche	$11^{h}34$	$11^{h}39$
Dijon	$1^{h}59$	$2^{h}15$ s.
Mâcon	$3^{h}51$	$3^{h}54$
Lyon	$4^{h}57$	$5^{h}14$
Valence	$6^{h}39$	$6^{h}42$
Avignon	$8^{h}16$	$8^{h}27$
Tarascon	$8^{h}45$	$8^{h}53$
Marseille	$10^{h}11$ s.	

Rapide 16.

	Arr.	Dép.
Marseille		$11^{h}53$ m.
Avignon	$1^{h}20$	$1^{h}26$ s.
Valence	$2^{h}51$	$2^{h}54$
Lyon	$4^{h}08$	$4^{h}14$
Mâcon	$5^{h}10$	$5^{h}13$
Dijon	$6^{h}40$	$6^{h}46$
Laroche	$8^{h}31$	$8^{h}36$
Paris	$10^{h}20$ s.	

Nous profiterons de l'occasion pour faire remarquer combien il serait désirable qu'on prît l'habitude d'indiquer les heures, dans les chemins de fer, de 0 à 24, en partant de minuit, afin d'éviter les désignations *matin* et *soir*, qui sont une source fréquente de confusions et d'erreurs. Dans quelques pays civilisés, cela se fait déjà ; mais pas encore en France. Il faut espérer que d'ici un siècle ou deux, on sera capable de comprendre qu'il est au moins aussi facile de dire « 17 heures » que « 5 heures du soir ».

Je ne saurais trop recommander de faire construire aux enfants des graphiques de cette nature, en utilisant les indicateurs des chemins de fer, et en choisissant de préférence des régions voisines, des localités qu'ils connaissent déjà, au moins de nom. En se servant de papier quadrillé, et en faisant les tracés à main levée, cela prendra peu de temps, et ce seront de très utiles exercices.

Les lignes à voie unique donneront matière à d'intéres-

santes remarques sur le tracé des graphiques, pour les croisements de trains qui marchent en sens contraires.

Il y a lieu de remarquer aussi comment un train marchant plus vite qu'un autre peut le dépasser, ce dernier se garant dans une station où il séjourne dans ce but, pendant le temps nécessaire. Nous ne saurions indiquer les mille détails intéressants que suggèrent la construction et l'observation de ces graphiques.

49. — Du Havre à New-York.

Il y a longtemps déjà, au cours d'un Congrès scientifique, et à la fin d'un déjeuner où se trouvaient réunis plusieurs mathématiciens connus, quelques-uns illustres, appartenant à diverses nationalités, Edouard Lucas leur annonça brusquement qu'il allait leur poser une question des plus difficiles. « Je suppose — dit-il — (ce n'est malheureusement

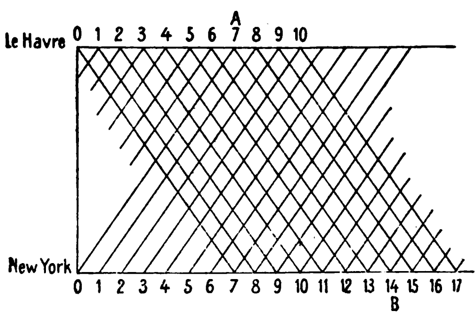


Fig. 89.

qu'une supposition) que chaque jour, à midi, un paquebot parte du Havre pour New-York, et qu'en même temps un paquebot de la même compagnie parte de New-York pour le Havre. La traversée se fait exactement en sept jours, soit dans un sens, soit dans l'autre. Combien le paquebot qui

part du Havre aujourd'hui à midi rencontrera-t-il en route de navires de sa compagnie faisant la route opposée? »

Quelques-uns des illustres auditeurs répondirent étourdiment : sept. La plupart gardèrent le silence, paraissant surpris. Pas un ne donna la solution juste, qui apparaît sur la figure 89 avec une entière clarté.

Cette anecdote, *absolument authentique*, contient deux enseignements. Elle montre d'abord combien il faut être indulgent et patient envers les élèves qui ne comprennent pas du premier coup des choses nouvelles pour eux. En plus, elle fait ressortir la haute utilité des représentations graphiques. Si, en effet, le plus ordinaire des mathématiciens avait eu cette notion, la figure 89 se serait construite d'elle-même dans son esprit. Il l'aurait vue et n'aurait pas hésité. Les auditeurs de Lucas, au contraire, ne pensaient qu'aux navires devant partir, et oubliaient ceux déjà en route, raisonnant, mais ne voyant pas.

Il est donc certain que tout paquebot dont le graphique est AB rencontrera en mer 13 navires, plus celui qui entre au Havre à l'instant du départ, plus celui qui part de New-York à l'instant de l'arrivée, soit 15 en tout. Le graphique montre en même temps que les rencontres se feront chaque jour à midi et à minuit.

C'est à Lucas également qu'est dû le problème qu'on trouve dans son *Arithmétique amusante* sous le titre de « la Balade de l'escargot rétrograde », formulé ainsi :

« Un escargot se lève un dimanche à six heures du matin et monte le long d'un arbre ; pendant le jour, c'est-à-dire jusqu'à six heures du soir, il monte de cinq mètres ; mais pendant la nuit, il descend de deux mètres. A quelle époque sera-t-il monté de neuf mètres ? »

C'est encore un problème de courriers (de courriers lents). Un enfant étourdi répondra : mercredi matin ; ce qui est faux. Je laisse à mes lecteurs et surtout à leurs élèves le plaisir de trouver la solution, en construisant le graphique de la marche de l'escargot rétrograde.

50. — Le temps qu'il fait.

Nous donnons ici (fig. 90) deux graphiques à la fois, l'un relatif à la pression barométrique, l'autre à la température, pendant la dernière semaine de l'année 1881. Nous les empruntons au journal *La Nature*, mais en enlevant, pour simplifier, diverses autres indications.

Ici, nous voulons seulement montrer comment les variations de fonctions sur lesquelles on n'a d'autres données que celles de l'expérience sont heureusement représentées par la méthode graphique.

Il nous paraît intéressant aussi de montrer comment deux fonctions différentes peuvent être représentées à la fois sur une même figure avec une entière clarté.

La ligne des variations du baromètre est dessinée par un trait plein ; celle des variations du thermomètre par un trait pointillé.

Pour lire les pressions barométriques, il faut se reporter à la gauche de la figure, et pour lire les températures, à la droite.

Aucune confusion n'est possible.

Ces graphiques ont rendu les plus grands services en météorologie et ils ont largement contribué à répandre cette science si utile, qui n'en est encore qu'à ses débuts, mais qui progresse chaque jour.

51. — Deux cyclistes pour une bicyclette.

Deux bicyclistes ayant entrepris un voyage, l'un d'eux se trouve démuni de sa machine, qu'il ne pourra retrouver qu'au bout d'un certain temps, une fois les réparations faites. En attendant, ils ont résolu de ne pas interrompre leur

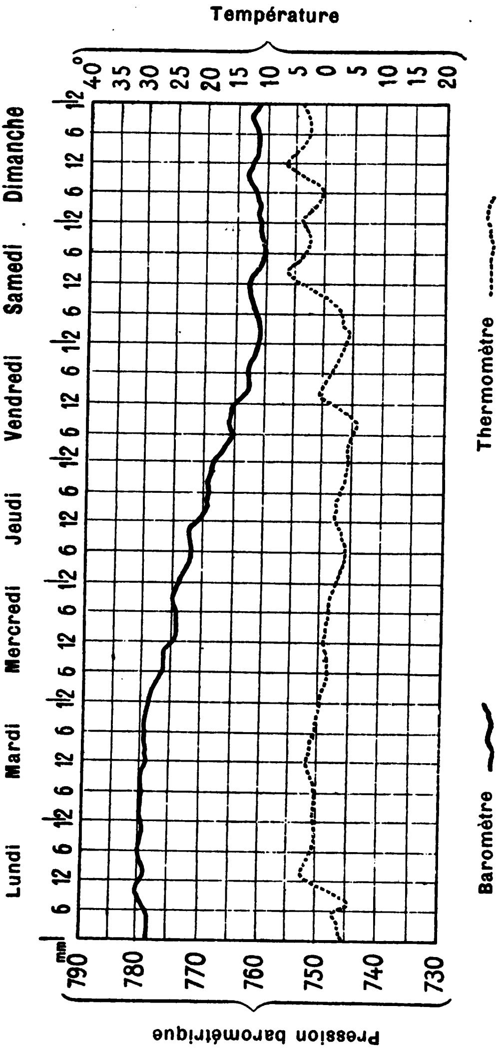

Température
40° 35 30 25 20 15 10 5 0 5 10 15 20
Dimanche
Samedi
Vendredi
Jeudi
Mercredi
Mardi
Lundi
6 12 6 1/2
Thermomètre
Baromètre
mm 790 780 770 760 750 740 730
Pression barométrique

Fig. 90.

voyage. Dans ce but, ils le poursuivront en allant, tantôt à pied, tantôt à bicyclette, de la façon suivante. Ils partiront ensemble, l'un sur la machine, l'autre à pied. A un certain point, le bicycliste déposera sa machine dans un fossé sur le bord de la route, et continuera la route à pied. Son compagnon, arrivé à l'endroit convenu, montera la machine et rejoindra l'autre. A cet instant, ils changeront de nouveau et pourront continuer suivant le même procédé.

Aujourd'hui, ils ont seulement 40[kil] à faire; à bicyclette, chacun d'eux fait 15[kil] à l'heure, et à pied, 5[kil]. A

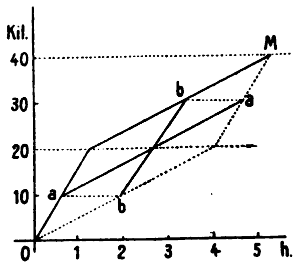


Fig. 91.

quel endroit la machine doit-elle être mise de côté par le premier voyageur, en supposant qu'on ne fasse plus d'autre échange, de façon que les deux voyageurs arrivent ensemble à destination ?

La réponse est évidente. Comme chacun doit faire la même route à pied, et à bicyclette, pour arriver en même temps, c'est évidemment à moitié route, soit à 20[kil] du point de départ que la machine doit être déposée.

La figure 91 nous donne alors les graphiques des marches des deux voyageurs, le premier en trait plein, le second en pointillé. Pour faciliter le langage, supposons que le départ ait lieu à midi. Le bicycliste arrive à moitié route à 1 heure 20 minutes; il laisse la machine de côté et continue à pied; il lui reste 20[kil] à faire et il arrivera à 5 h. 20 minutes.

Son compagnon, parti à pied, arrive à 4 h. à moitié route. Il monte alors sur la bicyclette et arrive également à 5 h. 20 minutes.

En somme, ils ont tous deux mis 5 h. 20 minutes pour faire 40^{kil}, ce qui représente $7^{kil},5$ à l'heure. C'est, on le voit, un mode de locomotion qui fait gagner sensiblement sur la vitesse d'un piéton, et qui peut être recommandable pour deux jeunes gens ayant eu juste de quoi se procurer une seule machine, en mettant en commun leurs économies.

Pour que le procédé soit vraiment pratique, il faut, à moins que le pays soit très désert ou d'une honnêteté exceptionnelle, rendre assez fréquents les échanges de la machine, afin qu'elle ne reste pas trop longtemps abandonnée sur le bord de la route. Sur la figure 91 elle-même, nous avons indiqué cette variante ; en supposant que la machine soit abandonnée à 10^{kil}, puis à 30 du point de départ, $OaaM$ serait alors le graphique de l'un des voyageurs, et $ObbM$ serait celui de l'autre. Ici les deux compagnons se rejoignent à moitié route ; mais le cycliste continue, dépassant l'autre. Les graphiques rendent compte de toutes ces circonstances.

Ils s'appliqueraient également à deux voyageurs n'ayant pas les mêmes vitesses moyennes, soit comme piétons, soit comme bicyclistes. On résoudrait aisément ainsi des questions qui se prêtent au calcul sans grande difficulté, mais qui alors exigent des connaissances mathématiques que nous ne supposons pas ici, même dans la moindre mesure.

52. — La voiture insuffisante.

Quatre voyageurs (M. et Mme Arnaud, M. et Mme Bernard) arrivant un matin en chemin de fer à la gare de X..., avaient projeté de se rendre le jour même à Y..., petite ville distante de 63^{kil}, où ils se proposaient d'arriver pour

l'heure du dîner. On les avait prévenus qu'ils pourraient trouver à louer une automobile, qui les conduirait rapidement, par une belle route. Le renseignement était exact; seulement l'unique voiture disponible de la localité n'avait que deux places, en dehors de celle du chauffeur. Sa vitesse était de 30^{kil} à l'heure.

Vous voyez l'embarras. Nos voyageurs ne se piquaient pas d'être des marcheurs émérites; ils pouvaient modeste-

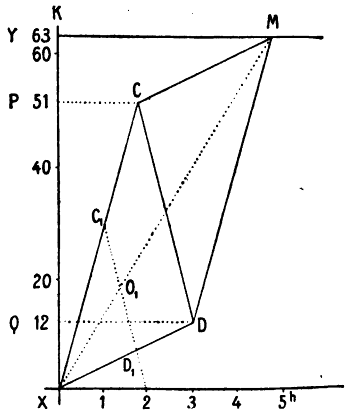


Fig. 92.

ment faire 4^{kil} à l'heure. Il fut convenu que deux d'entre eux, le ménage Arnaud (appelons-les, pour abréger, les voyageurs A), partiraient en automobile, et qu'en même temps M. et Mme Bernard (les voyageurs B) se mettraient en route à pied. A une certaine distance, la voiture déposerait les A, qui continueraient la route à pied, reviendrait en arrière au-devant des B, les prendrait et les conduirait à destination. Comment s'arranger pour que tout le monde arrive en même temps? Combien de temps aura-t-on mis en tout pour faire le voyage!

Questions pas bien embarrassantes, mais qu'il était utile de pouvoir cependant résoudre.

Ce problème, sauf des changements insignifiants dans les données, a été posé dans quelques concours. Il a une certaine analogie avec celui du numéro précédent, mais présente en plus une petite complication, résultant de ce que la voiture doit revenir en arrière chercher les voyageurs B.

Si on désigne par P l'endroit de la route où la voiture dépose les A, par Q celui où elle rejoint les B, les quatre points X, Q, P, Y sont échelonnés dans cet ordre ; les A vont de X à P en automobile, de P à Y à pied ; les B vont de X à Q à pied, de Q à Y en automobile. Pour que tout le monde arrive en même temps, il faut donc que XP = QY, et XQ = PY, ce qui en résulte ; et par conséquent, comme tout à l'heure, le graphique de la marche des A et celui de la marche des B formeront à eux deux un parallélogramme (fig. 92). Mais tandis que dans la figure 91 la diagonale de ce parallélogramme était parallèle à l'axe sur lequel sont portés les temps, la bicyclette restant immobile dans le fossé, ici il en sera tout autrement. La diagonale C D ne sera autre que le graphique de la marche de l'automobile, lorsqu'elle revient au-devant des voyageurs B.

Sur cette figure 92, XCM représente donc la marche des A, XDM celle des B, et XCMD est un parallélogramme. Cette remarque fournit le moyen de construire très facilement la figure. Il suffit pour cela de construire tout d'abord les deux droites XC et XD, ce qui se fait tout de suite puisqu'on a la vitesse de l'automobile (30^{kil} par heure) et celle des piétons (4 ^{kil} par heure). Prenant alors un point C_1 quelconque sur XC, par exemple celui qui correspond à 1 heure et 30 kilomètres, on mène C_1D_1 qui représente le graphique de retour de l'automobile, si elle revenait en arrière à partir de C_1 ; cette droite coupe en D_1 la droite XD. On prend le milieu P_1 de C_1D_1, et en joignant X et O_1, la droite XO_1 menée jusqu'au point M qui correspond à une distance de 63 ^{kil}, nous donnera l'extrémité M des deux graphiques ; on mènera alors MC parallèle à XD, MD parallèle à XC ; le parallélogramme sera complètement dessiné, et XCDM représentera

le graphique de l'automobile. On voit alors sur la figure que D correspond à 3^h et 12^{kil}, C à environ $1^h\ ^3/_4$ et 51^{kil}, M à $4^h\ ^3/_4$, et naturellement, à 63^{kil}.

En conséquence, l'automobile devra déposer les A à 51^{kil}; il sera environ $1^h\ ^3/_4$; elle reviendra rejoindre les B, qu'elle trouvera à 3^h, à 12^{kil} du point de départ, et elle arrivera à destination à $4^h\ 45^m$, en même temps que les A.

Un calcul précis donnerait 4^h 42 minutes au lieu de $4^h\ 45^m$. On voit que la différence est bien faible dans la pratique.

En résumé, les voyageurs ont dû faire 51^{kil} en automobile et 12^{kil} à pied, et le trajet total s'est effectué en 4^h 42 minutes. La vitesse moyenne est à peu près de 13^{kil} 400, c'est-à-dire qu'on arrive à destination à la même heure que si on avait fait tout le trajet dans une voiture ayant une vitesse de 13^{kil}, 400 à l'heure. Les voyageurs — les A comme les B — en marchant pendant 3 heures, auront fait 12^{kil} et le reste en automobile ; quant à l'automobile, elle aura parcouru en tout 141^{kil}, savoir : 51 en avant, 39 en rétrogradant, et 51 encore en avant.

Cet exemple, traité avec quelque détail, pourra servir de thème à autant d'exercices analogues qu'on voudra, en prenant d'autres données.

53. — Le chien et les deux voyageurs.

Deux piétons parcourent une route en allant dans le même sens. Le premier, A, a 8^{kil} d'avance sur l'autre, et fait 4^{kil} à l'heure ; le second, B, fait 6^{kil} à l'heure. L'un des deux voyageurs a un chien, qui à l'instant précis dont nous partons, court jusqu'à l'autre voyageur avec une vitesse de 15^{kil} à l'heure, puis revient aussitôt vers son maître : l'ayant rejoint, recommence le même manège, et continue ainsi jusqu'à ce que les deux voyageurs se rencontrent, en

oscillant de l'un à l'autre. Il s'agit de savoir quel chemin aura parcouru l'animal, jusqu'à la rencontre.

Il semble que la question peut se poser de deux façons, suivant que le chien appartient à l'un des piétons ou à l'autre. Dans la figure 93, on compte les temps à partir de l'instant où le chien est lâché. Les graphiques des deux voyageurs sont OM et 8M, et le point M, qui représente la rencontre, correspond à 24^{kil} et à 4^h de marche. Si le chien appartient au voyageur qui est en arrière, son graphique est O*aa*... ligne en zigzag qui oscille entre les graphiques des marches des deux piétons. S'il appartient au voyageur qui est en avant, son graphique est 8*bb*... ligne de même nature, mais différente de la première. Dans les deux cas cependant, l'animal n'a cessé de courir pendant 4 heures, et comme il fait 15^{kil} à l'heure, il aura de la sorte parcouru 60 ^{kil}. On voit donc que dans les deux hypothèses, le résultat sera le même.

Nous avons pris des données exceptionnellement simples, pour rendre plus aisées les explications. Il conviendra de

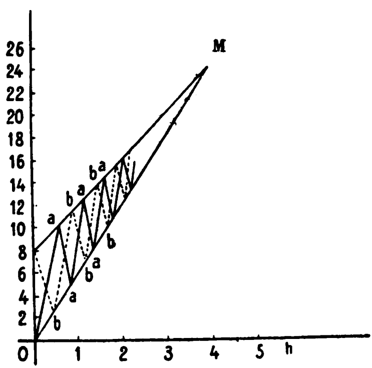


Fig. 93.

les varier, dans les exercices qui pourront être proposés à ce sujet. On pourra aussi bien supposer que les voyageurs marchent à la rencontre l'un de l'autre, et non plus dans le même sens.

54. — La pierre qui tombe.

Dans les graphiques de marche que nous avons vu jusqu'ici, qu'il s'agisse de piétons, de voitures, de trains de chemin de fer, de chiens, le chemin parcouru dans un temps donné, dans une seconde par exemple, était toujours le même, et il s'ensuivait que le graphique était une ligne droite. On exprime encore cela en disant que la vitesse était constante ou que le mouvement était uniforme.

Il n'en est plus de même pour le mouvement d'une pierre qu'on lâche à une certaine hauteur, et qu'on laisse tomber. L'expérience apprend, si l'on ne tient pas compte de la résistance que l'air oppose au mouvement, qu'au bout d'une seconde, la pierre aura tombé d'environ $4^m,90$. Au bout de 2 secondes, elle aura parcouru $19^m,60$, au bout de 3 secondes, $44^m,10$. Cela nous montre que le graphique de ce mouvement (fig. 94) aura la forme d'une courbe, et non plus

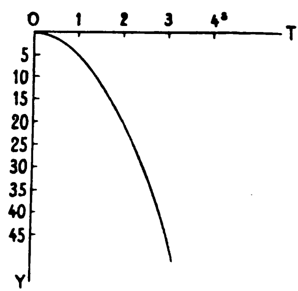


Fig. 94.

d'une ligne droite. Cette courbe sera à peu près celle indiquée sur la figure. C'est un fragment d'une ligne dont on dira plus loin quelques mots et qu'on appelle la *parabole*.

En écrivant la formule $y = 4,9 \times t^2$, on a la distance y parcourue par la pierre dans sa chute, quand elle a tombé

pendant un certain temps *t*, pourvu que le temps soit mesuré en prenant la seconde pour unité ; alors le nombre *y* qu'on obtiendra sera un nombre de mètres.

Par exemple, en $\frac{1}{10}$ de seconde, la pierre lâchée ne tombe que de 49 millimètres, et comme nous venons de le dire, au bout d'une seconde, elle est rendue à $4^{m},90$. En 10 secondes, elle aurait parcouru 490 mètres. On voit ainsi qu'elle va de plus en plus vite ; on dit que son mouvement est accéléré.

Pour tomber d'une hauteur de 300^{m}, soit du sommet de la Tour Eiffel jusqu'à terre, il faudrait à une pierre un peu moins de 8 secondes, euviron 7 secondes 8 dixièmes, en supposant toujours qu'on ne tienne pas compte de la résistance de l'air. En pratique cette résistance ne compte que fort peu pour de petites hauteurs, mais elle devient très appréciable lorsque la chute se prolonge, et il ne faudrait pas croire qu'alors notre graphique représente la réalité des choses.

55. — La balle de bas en haut.

Si on lance une balle de plomb à la main, de bas en haut, elle s'élèvera jusqu'à une certaine hauteur, puis retombera ensuite. En suivant l'objet des yeux avec une certaine attention, il n'est pas difficile de constater que le mouvement se ralentit de plus en plus, tant que l'ascension se produit, tandis qu'au contraire pendant la descente de la balle, celle-ci va de plus en plus vite. Dans la première période, le mouvement est retardé, et dans la seconde il est accéléré.

Qu'au lieu de se servir de la main, on emploie un instrument, et par exemple une arme à feu dont le canon serait bien vertical, et toutes les mêmes circonstances se produiront. Seulement, plus on aura lancé la balle avec une grande vitesse, plus elle s'élèvera, et plus il s'écoulera de temps avant qu'elle retombe à terre.

Il est intéressant de connaître les diverses circonstances du mouvement, c'est-à-dire de savoir, notamment : à quelle hauteur la balle s'élèvera ; combien il lui faudra de temps pour arriver à cette hauteur : combien il lui en faudra pour descendre.

Lorsqu'on connaît la vitesse a avec laquelle on a lancé la balle, et qu'on appelle vitesse initiale, toutes les réponses à ces questions sont données par la formule.

$$y = at - 4{,}9 \times t^2$$

Pour comprendre ce qu'elle signifie, et en faire usage au besoin, il faut savoir :

1° Que la hauteur y est mesurée en mètres ;

2° Que la vitesse initiale a est mesurée en mètres à la seconde : c'est-à-dire que la balle est lancée de telle sorte que si rien ne la ralentissait, elle ferait indéfiniment a mètres par seconde ;

3° que le temps t est mesuré en secondes.

Si simples que puissent être les calculs auxquels conduit cette formule, on se rendra encore plus exactement compte du mouvement, au moyen d'un graphique (fig. 95). Il a été construit en supposant que $a = 20$, c'est-à-dire que la balle est lancée de telle sorte qu'elle ferait 20 mètres par seconde, si rien ne venait s'opposer à son mouvement.

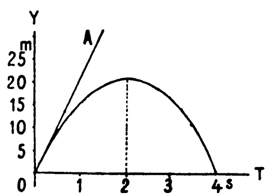


Fig. 95.

Si on construit la droite OA qui serait le graphique de ce mouvement uniforme de 20 mètres par seconde, il y a un moyen très simple d'obtenir celui que nous cherchons : c'est, reprenant la figure 94, de porter exactement les mêmes hauteurs, pour 1 seconde, 2 secondes, 3 secondes, etc., mais au-dessous de OA (fig. 95) au lieu de les porter au-dessous de OT (fig. 94).

Un autre moyen, c'est de se servir de la formule ci-dessus $at - 4{,}9 \times t^2$, pour avoir chaque valeur de y.

De toutes façons, on verra, dans l'hypothèse que nous avons faite $a = 20$, que la balle s'élèvera pendant 2 secondes et 4 centièmes environ, qu'elle atteindra une hauteur de $20^m,40$ et qu'elle mettra encore 2 secondes et 4 centièmes pour redescendre. La ligne obtenue a encore ici la forme d'une parabole.

D'une manière générale, le temps employé à la descente sera toujours le même que celui employé à la montée. Et la hauteur à laquelle la balle s'élève est toujours $\frac{a^2}{19,6}$, exprimée en mètres.

Ici comme dans le nº précédent, il est bien entendu qu'on ne tient pas compte de la résistance de l'air, qui cependant pour des vitesses initiales un peu fortes aurait une action sensible, aussi bien à la montée qu'à la descente.

56. — Les trains du métro.

Le chemin de fer métropolitain de Paris présente des conditions d'exploitation toutes spéciales, imposées par les obligations d'un service de voyageurs dans une grande ville. D'abord, les stations sont extrêmement rapprochées; en général de quelques centaines de mètres seulement. En outre, les trains se succèdent à de courts intervalles de temps; il en résulte que l'arrêt d'un train à chaque station doit être réduit à la plus faible durée possible.

Dans de telles conditions, une bonne partie du temps nécessaire pour aller d'une station à la station suivante est employé, au départ, à accélérer le mouvement; puis, un peu avant d'arriver, à le retarder, en faisant usage des freins; car en voulant s'arrêter trop brusquement, des accidents s'ensuivent.

On pourrait dire qu'il en est de même pour tous les trains de chemins de fer. C'est en partie vrai; mais comme les distances entre deux stations sont assez grandes, les périodes

de mise en marche et de freinage comptent pour bien peu de chose dans l'ensemble. C'est pour cela qu'on peut, sans s'éloigner de la vérité pratique, représenter par une ligne droite le graphique de la marche d'un train entre deux stations.

La marche d'un train du métropolitain est donc intéressante, en raison de ces particularités, et de la forme du graphique correspondant, qui est représenté par la figure 96.

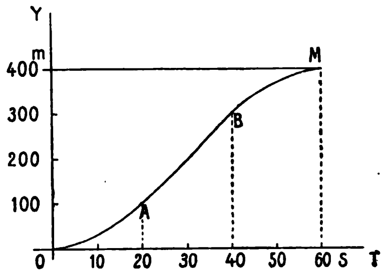


Fig. 96.

Pour établir ce graphique, nous avons supposé deux stations distantes de 400^{m} l'une de l'autre, une vitesse de pleine marche de 36 kilomètres à l'heure, ce qui correspond à 10^{m} par seconde[1] ; enfin on admet qu'il faut 20 secondes, en par-

[1] Une remarque pratique, intéressante et fort utile, consiste en ce qu'on passe de la vitesse en kilomètres à l'heure à celle en mètres à la seconde, en multipliant par $\frac{5}{18}$. Ici $36 \times \frac{5}{18} = \frac{180}{18} = 10$. Réciproquement, on passe de la seconde à la première en multipliant par $\frac{18}{5}$ ou $\frac{36}{10}$. Il suffit pour cela d'enlever $\frac{1}{10}$ et de multiplier par 4 ; ainsi un train qui ferait 30 m. à la seconde aurait une vitesse de 108 kil. à l'heure; car $30 - 3 = 27$; et $27 \times 4 = 108$.

tant du repos, pour arriver à prendre toute sa vitesse ; et qu'il faut également une période de 20 secondes de freinage pour s'arrêter progressivement.

Avec ces données qui correspondent à celles de l'exploitation réelle, un train partant du repos, marche d'abord d'un mouvement accéléré, à la manière d'une balle qui tombe, venant d'être lâchée ; il parcourt ainsi 100 ^{m} pendant 20 secondes ; il file alors en pleine marche, à 10 ^{m} par seconde pendant 20 secondes, et parcourt ainsi 200 ^{m} ; alors il serre les freins, marche d'un mouvement retardé, parcourt 100 ^{m} en 20 secondes, et s'arrête. Il est alors à la station qu'il s'agissait d'atteindre, et il a mis une minute, ou 60 secondes pour effectuer son parcours.

Le graphique (fig. 96) rend compte de toutes ces circonstances ; de O en A, c'est la période de mise en marche (100 ^{m} en 20 secondes) ; de A en B, la période de pleine marche (200 ^{m} en 20 secondes) ; et de B en M la période de freinage pour arriver à l'arrêt (100 ^{m} en 20 secondes).

Il suffit de regarder la figure pour se rendre compte de l'importance des périodes de mise en marche et de freinage sur d'aussi faibles parcours. Si deux stations étaient distantes de 200 ^{m}, au lieu de 400 ^{m}, la période de pleine marche disparaîtrait complètement, et il faudrait 40 secondes pour parcourir ces 200 ^{m}.

57. — Géométrie analytique.

L'idée générale qui préside à la construction de tout graphique a été indiquée au n° 46 et appliquée sous diverses formes dans les n^{os} suivants. Elle consiste, rappelons-le, ayant tracé deux droites perpendiculaires OX, OY, à porter sur OX une longueur $x = OP$, sur OY une longueur $y = OQ$ et à déterminer un point M en menant par P et Q des parallèles à OY et OX qui se coupent en ce point M.

Si y est la valeur d'une fonction de x qu'on veut représenter, la ligne obtenue en unissant tous les points M qu'on a construits représentera les variations de la fonction y.

Au prix de quelques dénominations nouvelles, nous allons retrouver là tout ce qui est à la base d'une science importante et très utile, la *Géométrie analytique*, due au génie de Descartes [1].

Et il faut bien ajouter que sans la Géométrie analytique, on n'aurait sans doute pas imaginé les graphiques.

Les deux droites OX, OY (fig. 97) s'appellent des *axes*

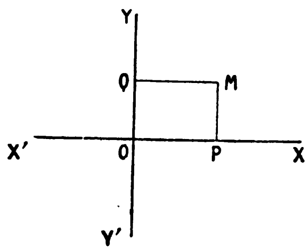


Fig. 97.

coordonnés. OX est l'axe des x, ou l'axe des *abscisses;* OY, l'axe des y, ou l'axe des *ordonnées*.

$OP = x$ et $OQ = y$ sont les *coordonnées* du point M; OP est l'*abscisse* de M et OQ son *ordonnée*.

Une abscisse négative serait portée dans la direction OX′, une ordonnée négative dans la direction OY′.

Il en résulte que si un point, comme sur la figure, est dans l'angle XOY, son x et son y sont positifs;
s'il est dans l'angle YOX′, son x est négatif, son y est positif;
X′OY′, son x et son y sont négatifs;
Y′OX, son x est positif, son y négatif.

[1] René Descartes, illustre philosophe et savant français, né à la Haye, en Touraine (1596-1650).

Si on marque un point sur le plan de la figure, ses deux coordonnées s'ensuivent. Si on donne deux coordonnées quelconques, la position du point correspondant s'ensuit.

Si les deux coordonnées x, y sont, non pas quelconques, mais liées entre elles par une relation algébrique, c'est-à-dire de telle sorte qu'une des coordonnées étant connue, l'autre s'en puisse déduire par des opérations de calcul bien définies, le point M alors décrira une ligne. On dira que la relation algébrique en question est l'*équation* de la ligne.

Construire une ligne, et trouver ses propriétés, connaissant son équation ;

Trouver l'équation d'une ligne, quand elle a été définie d'une manière bien précise par un moyen quelconque ;

Tels sont les deux grands problèmes généraux dont s'occupe la Géométrie analytique.

Nous n'avons pas l'ambition d'apprendre quoi que ce soit en ce moment, en Géométrie analytique. Mais il n'était pas inutile de remarquer qu'en construisant nos divers graphiques, nous avons fait un peu de Géométrie analytique sans nous en douter, avant de connaître même le nom de cette science. Il était bon aussi de profiter de cette occasion pour saluer en passant la mémoire d'un des plus grands génies dont ait le droit de s'enorgueillir l'humanité.

C'est depuis l'invention de la Géométrie analytique que l'étude des lignes courbes a fait d'immenses progrès, grâce aux ressources nouvelles qu'apportait cette science.

Trois de ces lignes courbes, cependant (et aussi quelques autres), avaient été étudiées dans l'antiquité par les géomètres grecs, avec le seul secours de la Géométrie. L'esprit reste confondu quand on considère quelle puissance intellectuelle, quels prodigieux efforts cérébraux il a fallu à ces savants, il y a une vingtaine de siècles et plus, pour arriver aux découvertes dont nous profitons encore.

Les trois lignes dont nous voulons parler sont encore aujourd'hui d'un usage continuel, même dans les applications.

C'est ce qui nous détermine à en dire quelques mots dans les numéros qui suivent, non pas pour les étudier, bien entendu, mais pour qu'on sache simplement ce que c'est, et pour qu'on puisse entrevoir quel plaisir et quel intérêt on prendra plus tard à leur étude.

58. — La parabole.

Nous l'avons déjà rencontrée, cette courbe, dans les graphiques de la pierre qui tombe, de la balle lancée de bas en haut, et dans une partie du graphique des trains du Métro. Quand, en nous promenant dans la campagne, il nous arrive d'apercevoir un pont suspendu, la forme courbe qu'affectent les câbles du pont est celle d'une parabole.

La définition précise de la parabole consiste (fig. 98) en ce que chacun de ses points M est à égale distance d'un point donné F, et d'une droite donnée (D), en sorte que MF = MP. La courbe a alors la forme indiquée par la figure ; si par F, qu'on appelle *foyer* de la parabole, on abaisse une perpendiculaire sur la droite (D) nommée *directrice*, cette droite FY est l'*axe* de la courbe ; cette dernière a la même forme d'un côté et de l'autre de cet axe. L'axe coupe la courbe en A, à moitié distance entre le foyer F et la directrice. Le point A est le *sommet* de la parabole.

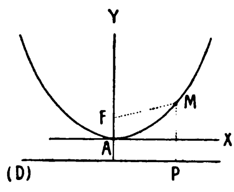


Fig. 98.

Si l'on prenait AY pour axe des ordonnées, et une perpendiculaire AX pour axe des abscisses, l'équation de la parabole serait $y = kx^2$.

59. — L'ellipse.

Beaucoup d'arches de ponts ont la forme d'une demi-ellipse. Quand on coupe obliquement, avec un couteau, une carotte de forme un peu régulière, la section est une ellipse. En éclairant un disque rond, par exemple une pièce de monnaie, avec une lampe, et en projetant l'ombre sur une feuille de papier blanc, cette ombre est encore une ellipse.

L'Astronomie enfin nous apprend que toutes les planètes, et la nôtre en particulier, tournent autour du Soleil en décrivant des ellipses.

On définit l'ellipse par cette propriété que la somme des distances d'un de ses points à deux points donnés F, F′ est constante; F, F′ sont les *foyers* de l'ellipse. De là un moyen de tracer une ellipse sur un sol sablonneux; fixant deux piquets en F, F′, et y attachant par les deux bouts un cordeau dont la longueur a été donnée, on tend ce cordeau au moyen d'une pointe de fer M ; si on promène cette pointe sur le sol en gardant toujours le cordeau bien tendu, elle tracera l'ellipse; ce procédé est connu sous le nom de « tracé des jardiniers ».

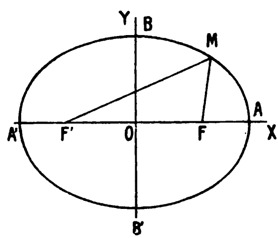


Fig. 99.

On voit (fig. 99) que l'ellipse est une courbe fermée; la droite FF′ s'appelle *axe focal* ou *grand axe ;* le milieu O de FF′ est le *centre;* la perpendiculaire OY à FF′ est le *petit axe;* la courbe a une forme exactement pareille au-dessus et au-dessous du grand axe, à droite et à gauche du petit axe.

Le grand axe coupe la courbe en deux points A, A'; le petit en B, B'; les 4 points A, A', B, B' sont les *sommets* de l'ellipse. On voit facilement que la longueur constante MF + MF' est égale à A'A ou 2OA; on l'appelle la longueur du grand axe; la longueur du petit axe est BB' ou 2OB.

Si les deux points F, F' étaient confondus en un seul, en O, alors l'ellipse deviendrait un cercle et on aurait OA = OB.

Si on prenait OA et OB pour axes des x et des y, l'équation de l'ellipse serait, en appelant a la longueur OA et b la longueur OB.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'équation du cercle, si b devient égal à a, est

$$x^2 + y^2 = a^2$$

60. — L'hyperbole.

Bien que cette courbe soit fort importante aussi, on en voit moins facilement des exemples usuels que pour les deux précédentes. Cependant si un abat-jour circulaire étant adapté sur une lampe, on le place de telle sorte que la lumière soit au-dessous, et si l'on regarde l'ombre que porte alors le bord inférieur de l'abat-jour sur un mur vertical, c'est un fragment d'hyperbole.

L'hyperbole se trouve définie par cette propriété que la différence des distances de l'un quelconque de ses points à deux points fixes F, F', qu'on appelle *foyers*, est constante,

Comme tout à l'heure pour l'ellipse, la droite FF′ (fig. 100) et la perpendiculaire OY élevée sur le milieu de FF′ sont les *axes* de la courbe. Celle-ci est de même forme au-dessus et au-dessous de FF′, à droite et à gauche de OY. L'axe FF′ coupe la courbe en deux points A, A′, qui sont les *sommets;* on l'appelle *axe transverse;* l'axe OY ne rencontre pas la courbe. Le segment A′A a une longueur égale à la différence constante des distances d'un point de la courbe à F et à F′.

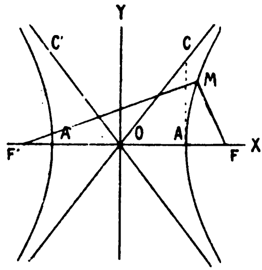


Fig. 100.

Ce que nous voyons apparaître ici de nouveau, c'est que la courbe, qui peut d'ailleurs s'étendre aussi loin qu'on voudra, se compose de deux parties, de deux branches, comme on dit, complètement séparées l'une de l'autre.

Il faut noter l'existence de deux droites OC, OC′ qu'on appelle les *asymptotes* et qui sont telles qu'en les prolongeant et prolongeant aussi la construction de la courbe, on verra la courbe et la droite se rapprocher l'une de l'autre, indéfiniment, sans jamais se confondre. On peut construire aisément les asymptotes, en sachant que le point C est tel que CA est perpendiculaire à FF′ et que OC = OF. Si OA $= a$, OC $= c$, il s'ensuit que $AC^2 = c^2 - a^2$; en posant AC $= b$, et en prenant OA, OY pour axe des x et des y, l'équation de l'hyperbole serait :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ce qu'il faut surtout retenir de ces indications ultra-sommaires sur les trois courbes très importantes dont nous

venons de parler, c'est qu'elles peuvent fournir matière à des constructions nombreuses et variées, et contribuer à faire acquérir l'habileté de main nécessaire dans le tracé des courbes géométriques. Là encore il faudra, successivement ou alternativement, faire usage du papier quadrillé, des instruments usuels de dessin, des croquis à main levée, etc.

61. — Le segment partagé.

Soit AB un segment de droite que nous supposons prolongé dans les deux sens (fig. 101) et M un point mobile sur la droite AB. Si le point M est placé par exemple entre A

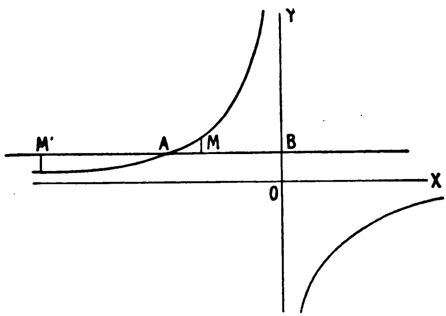


Fig. 101.

et B, il partage AB en deux segments AM, MB, et c'est le rapport $y = \frac{AM}{MB}$ de ces deux segments que nous voulons étudier. Il varie évidemment suivant la position de M.

Plaçons d'abord M en A ; le rapport est nul puisque MA est nul; si M se promène de A vers B, le rapport augmente; quand M est au milieu de AB, le rapport y est égal à 1 ; quand M s'approche de B, y prend des valeurs qui deviennent de plus en plus grandes, et on dit que lorsque M arrive en B, le rapport est infini, ce qui n'est qu'une manière de parler.

Si maintenant M dépasse un peu le point B, AM sera toujours positif, MB sera négatif, et très petit ; donc y, c'est-à-dire $\frac{AM}{MB}$, sera négatif et très grand ; M s'éloignant de plus en plus de B, le rapport restera négatif, sa grandeur diminuera, en restant toujours plus grande que 1, mais en se rapprochant de 1 de plus en plus.

Si maintenant, ayant toujours placé le point M en A, nous le faisons mouvoir vers la gauche, le rapport $\frac{AM}{MB}$ devient encore négatif; sa grandeur est plus petite que 1, et elle se rapproche de 1 de plus en plus, à mesure que M s'éloigne de A.

En représentant, pour chaque position du point M, la valeur du rapport y par une ordonnée élevée perpendiculairement à la droite AB, nous obtenons, comme graphique représentant les variations de ce rapport, la courbe représentée sur la figure 101 ; cette courbe est une hyperbole, dont les asymptotes sont BY, perpendiculaire à AB, et OX, parallèle à AB, à une distance marquée par l'unité, et au-dessous, c'est-à-dire dans le sens négatif.

La forme même de la figure montre qu'il n'y a pas deux points M pour lesquels le rapport $\frac{AM}{MB}$ puisse être le même. Dès qu'on donne la valeur y de ce rapport, avec son signe, la position précise de M est déterminée sur la droite AB.

62. — Do, mi, sol; harmonies géométriques.

Sur la figure 101, avons-nous dit, il ne peut pas exister deux points M différents tels que le rapport $\frac{AM}{MB}$ soit le même. Mais étant donné un point M, on peut en trouver un autre M′ et un seul, tel que les deux rapports $\frac{AM}{MB}$, $\frac{AM'}{M'B}$ aient même grandeur. Puisqu'alors les signes sont contraires, on a donc $\frac{M'A}{M'B} = \frac{AM}{MB}$.

Lorsque quatre points M′, A, M, B sont tels, sur une même droite, qu'il en soit ainsi, on dit qu'ils forment une *division harmonique*.

Le mot peut paraître étrange. Avant de l'expliquer, nous allons écrire la proportion $\frac{M'A}{M'B} = \frac{AM}{MB}$ un peu différemment; appelons *a*, *m*, *b*, les segments M′A, M′M, M′B. Alors $AM = m - a$, $MB = b - m$, et la relation devient

$$\frac{a}{b} = \frac{m - a}{b - m} \text{ ou encore } \frac{m - a}{a} = \frac{b - m}{b};$$

$$\frac{m}{a} - 1 = 1 - \frac{m}{b}; \; m\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2 \; ; \; \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m}.$$

D'autre part, on sait, depuis qu'on a commencé à étudier l'acoustique, que les longueurs d'une corde vibrante donnant les trois notes *do, mi, sol* qui constituent l'accord parfait majeur sont proportionnelles à :

$$1, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}$$

Les longueurs inverses sont donc proportionnelles à

$$1,\quad \frac{5}{4},\quad \frac{3}{2}$$

ou

$$4,\quad 5,\quad 6\,;$$

et, comme $4 + 6 = 2.5$, nos trois longueurs de cordes a, m, b, satisferont à la relation

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m},$$

écrite ci-dessus.

C'est ce rapprochement qui a conduit à la dénomination de division harmonique.

Plus généralement, quand on a une progression par différence quelconque

$$a \quad b \quad c\ldots..$$

et qu'on divise 1 par chacun des termes, la suite

$$\frac{1}{a} \quad \frac{1}{b} \quad \frac{1}{c}$$

ainsi obtenue s'appelle une *progression harmonique*.

Une des propriétés les plus remarquables des divisions harmoniques, qui jouent un rôle très important en Géométrie, est la suivante.

Soit (fig. 102) $M'AMB$ une division harmonique ; si on joint les 4 points qui la composent à un point P quelconque, et si on coupe les 4 droites PM', PA, PM, PB par une droite quelconque, on aura encore une division harmonique. Ainsi sur la figure, $M'_1A_1M_1B_1$, $M'_2A_2M_2B_2$ sont des divisions harmoniques.

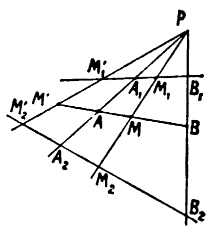


Fig. 102.

Le système des 4 droites PM', PA, PM, PB s'appelle un *faisceau harmonique*.

63. — Un paradoxe : 64 = 65.

En mathématique, on rencontre souvent des paradoxes, c'est-à-dire des résultats qu'on obtient, croyant avoir opéré juste, et qui cependant sont notoirement faux.

Tout paradoxe non expliqué est dangereux, car il jette dans l'esprit le trouble et le doute.

Tout paradoxe expliqué, au contraire, est instructif, car il attire l'attention sur un piège, montre de quelles illusions on peut être victime. Tantôt c'est un raisonnement incorrect, tantôt c'est une construction trop légèrement faite, qui conduiront à une flagrante absurdité.

Mais si les paradoxes, bien présentés et expliqués, ont ainsi leur place dans *l'enseignement*, il faut garder en cette matière une très prudente réserve dans *l'initiation*, où il n'est pas question d'approfondir les choses, où l'on se borne à les montrer et à les faire toucher du doigt.

C'est ce qui m'a décidé à ne présenter jusqu'ici aucune question de ce genre. Mais, arrivé au terme ou à peu près, je ne vois aucun inconvénient grave, bien au contraire, à faire exception pour une seule question, d'ailleurs très répandue aujourd'hui, qu'on pourra même laisser chercher (pas trop longtemps) à l'élève. Il est peu probable qu'il trouve le joint de lui-même; et vous ne tarderez pas à venir à son secours.

Prenons (fig. 103) un carré de 64 cases sur un papier quadrillé, et collons-le sur un carton. Ceci fait, traçons les lignes marquées sur la figure; elles décomposent le carré en deux rectangles ayant 8 côtés de cases pour base, et des hauteurs de 5 et 3 côtés; puis le grand rectangle est décomposé en deux trapèzes, et le petit en deux triangles.

Découpons notre carton, avec un canif ou des ciseaux, en suivant les 3 lignes tracées, ce qui nous donnera les 4 morceaux A, B (trapèzes) et C, D (triangles).

Assemblons maintenant les 4 morceaux comme l'indique la 2ème partie de la figure. Nous avons un rectangle, qui présente 5 colonnes de 13 cases chacune; nous voyons donc 5.13 ou 65 cases avec ce second arrangement; dans le carré, il n'y en avait que 8.8 ou 64. Et c'est avec les mêmes morceaux de carton que l'on obtient ces deux résultats différents.

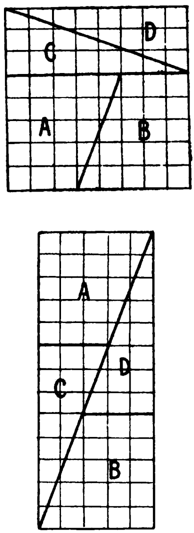


Fig. 103.

On est donc tenté, en croyant voir que 64 = 65, de se demander si on a perdu la tête.

L'explication n'est pas bien compliquée, une fois qu'on la connaît, mais il faut réfléchir un peu pour la découvrir.

En regardant la grande diagonale du rectangle, sur la 2ème partie de la figure, on arrive à se demander si c'est réellement une ligne droite. Elle se compose de deux parties : l'hypoténuse du triangle rectangle C et le côté du trapèze A. D'après le tracé, la pente de l'hypoténuse sur le grand côté est $\frac{3}{8}$; celle du côté du trapèze est $\frac{2}{5}$. Si ces deux fractions étaient exactement égales, on aurait une droite. Mais elles sont $\frac{15}{40}$ et $\frac{16}{40}$; la première est un peu plus petite que la seconde, et ce qui paraissait une droite est en réalité un quadrilatère très mince et très allongé qui cor-

respond à l'aire de la case ajoutée. Le raccordement paraissait se faire, mais en réalité ne se faisait pas exactement.

Si on prenait un carré de $21.21 = 441$ cases, et en divisant le côté en 13 et 8, on aurait par une construction pareille, en apparence, $441 = 442$. Seulement les deux fractions dont l'égalité serait nécessaire pour un assemblage parfait seraient alors $\frac{8}{21}$ et $\frac{5}{13}$, elles diffèrent seulement de $\frac{1}{273}$, de telle sorte que le raccordement semblerait être parfait pratiquement.

64. — Carrés magiques.

Si l'on écrit les 9 premiers nombres 1, 2,... 9 dans les cases d'un carré de la manière suivante :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

on peut vérifier qu'en ajoutant les nombres contenus dans une ligne, dans une colonne, ou dans l'une quelconque des deux diagonales, on trouve toujours $4 + 9 + 2 = 3 + 5 + 7 = 8 + 1 + 6 = 4 + 3 + 8 = 9 + 5 + 1 = 2 + 7 + 6 = 4 + 5 + 6 = 5 + 2 + 8 = 15$,

Une pareille figure est ce qu'on appelle un carré magique de 3; la somme 15 est la somme magique constante; si on enlevait 1 à chaque nombre, ce qui donnerait

3	8	1
2	4	6
7	0	5

le carré serait encore magique, mais la constante serait 12 au lieu de 15.

En prenant les nombres 0, 1, 2,... 24 qu'il s'agirait de placer dans un carré de 25 cases, on aurait, en satisfaisant aux mêmes conditions, un carré magique de 5 ; la constante serait 60.

Voici un exemple sur lequel on peut vérifier que toutes les conditions requises sont bien remplies :

0	19	8	22	11
23	12	1	15	9
16	5	24	13	2
14	3	17	6	20
7	21	10	4	18

Il y a plus : si on coupe le carré par une droite verticale entre deux colonnes quelconques, et si on fait permuter les deux morceaux, on aura encore un carré magique. Si on le coupe par une droite horizontale entre deux lignes, et si on fait de même, le carré obtenu sera encore magique.

Ed. Lucas a donné le nom de « diaboliques » aux carrés qui ont cette propriété.

Les carrés magiques ont fait l'objet de beaucoup de travaux. Bien qu'ils puissent paraître un simple jeu, ils donnent naissance à des questions présentant de grandes difficultés, et les plus illustres mathématiciens, Fermat entre autres, n'ont pas dédaigné de s'en occuper.

De nos jours, l'un des plus remarquables ouvrages publiés sur cette question, est celui de M. G. Arnoux : *Arithmétique graphique; Les Espaces arithmétiques hypermagiques;* Paris, Gauthier-Villars, 1894.

Nous avons tenu à signaler ici ces figures à titre de curiosité, dont il n'est guère permis d'ignorer l'existence.

65. — Discours final.

Si j'avais eu à initier quelques enfants à la connaissance des choses mathématiques essentielles, qui ont été examinées ci-dessus, voici, à peu près, ce que je leur dirais, arrivé au terme de notre course.

Vous allez commencer votre instruction, en matière mathématique. Suivant vos dispositions naturelles, suivant la direction que vous serez appelés à prendre plus tard dans la vie, cette instruction sera plus ou moins étendue ; mais, restreinte à certaines limites, elle est indispensable à tous.

Jusqu'à présent, vous n'avez rien étudié, mais vous avez appris un certain nombre de choses utiles, en vous amusant. S'il y a eu de votre part quelque effort, ce n'a jamais été qu'un effort volontaire, on n'a jamais rien exigé de vous, et surtout rien exigé de votre mémoire.

Avant même de savoir lire ou écrire, vous avez pu composer des nombres avec divers objets et faire quelques opérations simples. Lorsque l'emploi des chiffres a été possible, la pratique du calcul vous est devenue plus courante. Grâce à l'habitude de vous reporter aux objets eux-mêmes, et de ne pas considérer seulement les chiffres qui ne font que les traduire, vous êtes arrivés de très bonne heure à prendre la notion des nombres négatifs et à vous la rendre tout à fait familière. Quelques notions de Géométrie, constatées, non pas démontrées, ont suffi pour commencer à vous faire voir le lien étroit qui unit la science des nombres à celle de l'étendue.

L'étude des fractions n'a pas été faite par vous, pas plus qu'aucune autre étude, mais vous savez ce que c'est qu'une fraction et vous possédez assez bien la pratique courante du calcul qui s'y rapporte.

Des progressions, d'abord de formes simples, puis un peu plus généralisées, vous ont amenés ensuite, quelques exemples aidant, à l'idée de nombres énormes. D'autres grands

ombres ont apparu à vos yeux lorsque vous avez vu ce que 'est que les permutations.

Avec quelques notions pratiques complémentaires de Géo-nétrie et de dessin, vous avez pu prendre l'idée de la cons-ruction et de l'usage des graphiques, et en faire quelques pplications, à des questions de mouvements surtout. Vous tes arrivés ainsi jusqu'aux portes de la Géométrie analy-ique, vous avez aperçu tout au moins la forme des trois rincipales courbes que la Géométrie analytique permet l'étudier plus à fond, mais que les anciens connaissaient déjà.

Qu'il soit, de toutes ces notions, resté beaucoup ou peu lans votre mémoire, vous en avez toujours gardé quelque chose. Vous y avez pris en même temps, et bien certaine-nent sans vous en douter, des habitudes d'esprit qui vont vous devenir très précieuses.

Désormais, il ne va plus s'agir de jeu, mais d'étude. Vous levrez vous assujettir à des efforts intellectuels, peut-être aussi à quelques efforts de mémoire. Ils seront d'autant plus atténués que jusqu'ici vos forces ont été ménagées, et que cependant vous savez beaucoup plus de choses que n'en sa-vaient les enfants de votre âge qu'on instruisait en les sou-mettant à une véritable torture, qu'on forçait à retenir des mots sans y rien comprendre.

Dans la plupart des objets de vos études, vous retrouverez d'anciennes connaissances; le trouble que produit la nou-veauté sera effacé le plus souvent. Ne croyez pas cependant que vous ne rencontrerez pas de difficultés; vous en trou-verez, mais vous saurez qu'elles tiennent à la nature même des choses, qu'elles sont indispensables à surmonter pour arriver à des résultats utiles et intéressants, et cela vous donnera le courage nécessaire. Par le jeu, vous avez acquis bien des notions, et vos études à venir s'en trouvent faci-litées. Par le travail, désormais, vous allez tirer parti de ce que vous savez, vous exercerez votre raison, vous augmen-terez l'étendue de vos connaissances. Mais ce travail, s'il n'est plus un jeu, ne sera pas non plus une corvée! Vous y

prendrez goût, le sachant utile; peu à peu il deviendra pour vous comme un besoin de la vie; il vous sera, non plus seulement aisé, mais nécessaire.

En cas d'embarras, du reste, vous aurez des maîtres qui seront pour vous des guides; mais ne leur demandez rien de plus. L'effort personnel, l'effort libre seul peut donner des résultats. Vous en avez pris inconsciemment l'habitude dans les jeux de votre enfance. A vous d'en tirer profit maintenant, en apportant vous-même, à l'œuvre de votre instruction, tout ce que vous avez de patience, de volonté, d'énergie mise en réserve!

Tel est donc à peu près, sauf de nombreuses variantes, le langage qui devrait être tenu à l'enfant parvenu au terme de son initiation, et à la veille d'entreprendre ses études. Ce n'est pas en un discours, mais en dix ou cent séances au besoin qu'il y aura lieu de le pénétrer de ces idées. C'est à l'initiateur qu'il appartiendra d'en tirer parti pour orienter l'enfant sur les sentiers nouveaux qu'il est appelé à suivre.

Cet initiateur, dans ma pensée, devrait être surtout la famille. Mais alors même que par des raisons quelconques, personnelles ou sociales, il n'en serait pas ainsi, le père et la mère doivent bien se dire que leur premier devoir est de ne pas se désintéresser de l'évolution cérébrale de l'enfant, et de rester au moins les auxiliaires de l'éducateur, s'ils n'ont pu être éducateurs eux-mêmes.

Et, la tâche d'initiation achevée, celle de l'instruction devant être entreprise demain, le devoir des parents devient plus impérieux encore s'il est possible; leur responsabilité est lourde, car suivant la décision qu'ils vont prendre, la destinée entière de leur enfant peut être influencée, soit en bien, soit en mal.

C'est donc du côté des familles que je me retourne à présent, pour leur adresser quelques conseils, utiles à mon avis, présentés un peu au hasard de la plume, et où chacun prendra ce qu'il jugera bon.

D'abord, nous sommes d'accord sur ce point, que l'initiation mathématique est *indispensable* à tout enfant, sans aucune distinction de fortune, de situation sociale, de sexe; j'affirme maintenant, que toujours sans distinction, sans réserve, l'*instruction* mathématique est également indispensable. Les femmes en ont besoin comme les hommes; la vie courante, l'économie domestique aussi bien que l'industrie, dont les applications enveloppent toute notre vie, exigent de nous des connaissances sur la science des grandeurs et de l'étendue.

Ici, une objection que j'ai cent fois réfutée, mais que je ne me lasserai pas de réfuter encore. Mon enfant a-t-il des dispositions pour les études mathématiques? S'il n'est pas doué, c'est perdre son temps que de le diriger par là; je ne tiens pas à en faire un mathématicien.

C'est à merveille. Mais, quand vous avez appris au même enfant la lecture et l'écriture, vous êtes-vous demandé s'il avait pour ces branches d'étude des dispositions naturelles? Quand vous lui avez inculqué les premières notions du dessin, avez-vous pensé qu'il fût appelé à devenir un grand peintre? Nul ne conteste l'utilité pour chaque homme et chaque femme de savoir exprimer correctement ses idées dans sa langue maternelle; et on ne s'imagine pas pour cela que chaque élève soit destiné à devenir un Paul-Louis Courier, un Gœthe ou un Shakespeare.

Pas plus en mathématique qu'ailleurs, l'instruction ne *fait* des savants; et il ne s'agit pas d'en faire; mais il existe en toute matière un fonds général de connaissances utiles, nécessaires même à tout le monde, et d'une acquisition facile, pour tout être dont le cerveau n'est pas atteint d'une tare.

L'ensemble de ces connaissances, grâce à l'initiation préalable, peut être assimilé en un temps beaucoup plus court que celui qu'on y consacre dans l'enseignement habituel.

Ce bagage, en ce qui touche notre sujet, est à peu près représenté en France par ce qu'on appelle les mathémati-

ques élémentaires. Tout enfant peut, qu'il soit doué ou non d'une manière spéciale, s'assimiler l'ensemble de ces connaissances, de même qu'il peut arriver à lire et écrire avec correction, sinon avec élégance. S'il a le goût inné des mathématiques, il en fera ensuite de lui-même; s'il est littérateur par tempérament, il écrira. L'enseignement n'a jamais fait de savants ni d'artistes; son but devrait être de préparer des hommes.

Donc, sur ce point, pas d'hésitation possible. Votre enfant devra acquérir les notions mathématiques fondamentales nécessaires à tous. Mais suivant votre situation, vos goûts, votre tournure d'esprit, où et comment va-t-il recevoir cette instruction ?

Je ne peux parler ici que de la France. Avec quelques variantes, le problème se posera de même, à peu près partout. Nous avons un enseignement primaire, dont une bonne part a ou devrait avoir pour objet l'initiation; un enseignement primaire supérieur qui le complète; un enseignement secondaire partagé en compartiments nombreux et variés. Dans tout cela, il faut choisir, et vous choisirez, car, malheureusement sur ce point précis, je ne peux vous donner aucun conseil utile.

Notre enseignement primaire est passable; l'enseignement primaire supérieur serait le moins mauvais de tous, si beaucoup de familles ne restaient hypnotisées par l'attrait des « carrières libérales » et du fonctionnarisme.

Quant à l'enseignement secondaire, pour ne pas m'étendre outre mesure, je me bornerai à citer un très court passage d'une étude de M. Ascoli; on pourrait y voir la plus charmante des ironies, et peut-être ne se tromperait-on guère :

« Ce que l'on s'est proposé en augmentant l'importance « des sciences dans l'enseignement secondaire, c'est de leur « attribuer la large part qui doit leur revenir dans la forma- « tion des esprits. Jusqu'ici, ce rôle était dévolu aux lettres, « tandis que les sciences étaient surtout des matières d'exa- « men, dénuées de tout caractère éducateur. »

Traduisez : *jusqu'ici,* notre enseignement secondaire a eu pour mission d'abrutir la jeunesse, *tandis que* dans l'avenir, il en sera de même.

Et quand on pense que les professeurs de l'enseignement secondaire sont des hommes de haute instruction, dévoués à leur tâche, consciencieux autant qu'on peut l'être, on frémit à la pensée des ravages que peut produire l'esprit de routine, servi par une administration monstrueuse, n'ayant de puissance que pour le mal.

Quelle que soit la décision prise, en tous cas, n'abandonnez à aucun instant le contrôle de l'éducation de votre enfant. Avant même de le confier à un établissement quelconque, vous avez le droit et le devoir de vous enquérir de l'esprit de l'enseignement, des méthodes suivies, des conditions de travail, sans pour cela qu'il vous soit besoin d'être mathématicien vous-même.

Et surtout, ne vous laissez pas intimider par le directeur, proviseur, principal, peu importe le titre, qui prétendrait que vous vous mêlez de ce qui ne vous regarde pas.

Deux observations seulement vont vous donner une idée de la façon dont vous pouvez vous défendre.

Pour enseigner le système métrique, il existe des lycées où il n'y a pas un instrument de mesure : mètre, litre, poids, etc.

Pour l'enseignement de la Géométrie, on procède, depuis des siècles, on pourrait dire depuis les géomètres grecs, suivant une méthode fatigante, antirationnelle, qui décourage et dégoûte les élèves, surtout les commençants. Cependant, il y a plus de trente années, en 1874, un savant de haute valeur, M. Charles Méray, professeur à l'Université de Dijon[1], publia sous le titre « Nouveaux éléments de Géométrie » un livre tout à fait remarquable, menant de front l'étude du plan et de l'espace, et mettant en évidence les vérités d'ordre expérimental que la méthode classique dissimule avec hypocrisie. L'administration universitaire fut

[1] Ch. Méray (12 novembre 1835—2 février 1911).

prise de fureur; puis, le progrès aidant, et le temps s'étant écoulé, la nouvelle méthode s'est introduite dans un grand nombre d'écoles, surtout dans l'enseignement primaire supérieur. Partout elle donne les plus remarquables résultats. Mais l'enseignement secondaire, lui, reste fermé jusqu'ici, comme les oreilles d'un sourd qui ne veut pas entendre, bien qu'une 2ème édition du livre ait été publiée [1].

Si donc vous faites des démarches pour l'entrée de votre enfant au collège ou au lycée, par exemple, demandez à visiter le matériel d'enseignement des poids et mesures, les instruments d'arpentage, etc. Si on vous répond qu'il n'y a rien de tout cela dans la maison, sauvez-vous, et ne revenez jamais.

Posez aussi la question que voici, très simplement : « Pour enseigner la Géométrie, employez-vous la méthode Méray ? » — Trois réponses sont possibles, sauf les variantes de forme : oui, non, je ne sais pas ce que c'est. Dans le premier cas, vous pouvez poursuivre; dans le second, saluez très poliment le personnage, et tâchez de ne plus le revoir; dans le troisième cas, donnez-lui le bon conseil d'apprendre ce qui concerne sa profession, et dites-lui bien que vous pourrez continuer la conversation une fois son apprentissage achevé, mais pas avant.

Si les pères et les mères finissaient une bonne fois par avoir le souci profond de l'avenir intellectuel de leurs enfants, ils parleraient net, exigeraient ce qu'ils ont le droit d'exiger, et bien des résistances opiniâtres disparaîtraient comme par enchantement.

[1] Ceci était écrit en mai 1905. Depuis lors, un décret du 27 juillet, complété par des instructions publiées le 9 septembre, a modifié les programmes de Mathématiques dans l'Enseignement secondaire.

On a introduit les principes de la méthode de M. Méray en Géométrie, et il faut en féliciter le ministre de l'Instruction publique. Mais on n'a pas même cité le nom de l'Inventeur de la méthode. C'est à la fois un acte d'ingratitude et une injustice.

Cela finira, je crois, par arriver. Mais il faudra pour cela que soit plus profondément empreinte dans les cerveaux cette pensée si juste, énoncée par M. Emile Borel dans une remarquable conférence, et sous l'impression de laquelle je tiens à vous laisser :

« Une éducation mathématique à la fois théorique et pra-
« tique peut exercer la plus heureuse influence sur la for-
« mation de l'esprit. »

Note sur l'« Initiateur mathématique » de M. J. Camescasse.

Les moyens éducatifs que j'ai tenté d'exposer dans ce livre sont, comme on l'a vu, essentiellement concrets. Je recommande de les varier le plus possible et de recourir à l'usage des bâtonnets, des haricots, des jetons, etc., et aussi à l'emploi du papier quadrillé.

Mais j'ai toujours cru que la constitution d'un matériel approprié aux méthodes que j'indique serait très utile, principalement dans l'enseignement collectif. Pratiquement, la question n'était pas exempte de difficultés ; M. Camescasse est parvenu à les surmonter de la façon la plus ingénieuse, et nous a donné, sous le nom d'*Initiateur mathématique*, un jeu de petits cubes en bois, de 1 centimètre d'arête, les uns blancs, les autres rouges, qui peuvent être assemblés entre eux et se prêtent ainsi aux combinaisons les plus variées.

En dehors de la formation des nombres en numération décimale, de l'étude des mesures d'aires et de volumes dans le système métrique, des exercices de dessin ornemental ou de construction pouvant trouver leur place dans les

écoles maternelles, il est un grand nombre de questions, traitées ci-dessus, pour lesquelles l'*Initiateur* de M. Camescasse devient d'un très grand secours. Il permet, en effet, de réaliser matériellement, par les doigts même de l'enfant, les figures qui implanteront solidement dans son cerveau, les propriétés des nombres, et cela sans aucun effort.

Nous citerons en particulier les nos **16**, **21**, **25**, **26**, **27**, **28**, **29**, **31**, **32**, **33**, **34**, comme contenant des questions auxquelles s'applique heureusement l'*Initiateur mathématique*. Mais il est probable qu'à l'usage beaucoup d'autres applications se révèleront d'elles-mêmes.

Dans les familles, aussi bien que dans les écoles, c'est un matériel dont il sera possible de tirer grand profit, surtout quand on s'adressera à plusieurs enfants simultanément, car alors le temps nécessaire aux constructions sera notablement abrégé.

J'ai grand plaisir, pour toutes ces raisons, à signaler une tentative qui a pour objet d'amuser l'enfance en l'instruisant et de l'instruire en l'amusant. Au fond, les deux buts sont identiques ; on n'apprend bien et on ne retient fidèlement que ce qu'on a plaisir à apprendre. C'est vrai pour tous les âges ; c'est plus spécialement vrai quand il s'agit de l'enfance.

INDEX ALPHABÉTIQUE

(Les chiffres indiqués renvoient aux pages du volume.)

GEORG & Cie
ÉDITEURS
10, Corraterie, à Genève.

GAUTHIER-VILLARS
ÉDITEUR
55, Quai des Grands-Augustins,
à Paris (6e).

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT
PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
CHRONIQUE SCIENTIFIQUE — MÉLANGES — BIBLIOGRAPHIE

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS
Organe officiel
de la Commission internationale de l'Enseignement Mathématique.

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT
Docteur ès sciences
Ancien Examinateur d'admission à
l'École polytechnique de Paris.

H. FEHR
Docteur ès sciences
Professeur à l'Université de Genève
et au Gymnase.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL
Docteur ès sciences
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse

17e année, 1915

Imprimerie Albert Kündig, Genève (Suisse).